AT°

Perri, Dzh.

Дж. Перри.

КУРСЪ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВЪ.

ПЕРЕВЕЛИ СЪ АНГЛІЙСКАГО

К. А. Акуловъ и В. В. Башинскій,

Инженеры Путей Сообщенія.

Съ 106 рисунками въ текстѣ.

ИЗДАНІЕ Г. В. ГОЛЬСТЕНА,
С.-Петербургъ, Литейный пр., 28.
1904.

[illegible]TH

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА II.

Законъ сложныхъ процентовъ и гармоническія функціи.

ГЛАВА III.

Общая теорія дифференцированія и интегрированія.

Курсъ высшей математики для инженеровъ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Инженеръ обыкновенно не имѣетъ времени для общаго математическаго образованія, что конечно жалко, но и тѣ молодые инженеры, которые получили такое образованіе, не всегда находятъ помощь отъ своего математическаго образованія въ своей профессіи. Такіе люди, я надѣюсь, найдутъ эту книгу хотя бы полезной, если только они благодаря своимъ познаніямъ придутъ къ выводу, что, такъ какъ она элементарна, то они уже знаютъ все, чему она можетъ научить.

Но я пишу болѣе всего для читателей, которые получили весьма скромное математическое образованіе и которые готовы поработать, лишь-бы научиться, какъ примѣнить Высшій Анализъ къ инженернымъ задачамъ. Я полагаю, что хорошему инженеру нужно знать только основные принципы, но за то знать ихъ уже нужно очень хорошо.

2. Предполагается, что мой читатель имѣетъ элементарныя познанія въ области Механики, а если онъ намѣревается заниматься и задачами по Электричеству, то предполагается, что онъ имѣетъ элементарныя познанія и въ области Электричества. Осмысленное знаніе немногихъ основныхъ положеній—это все, что требуется. Это знаніе часто пріобрѣтается простымъ чтеніемъ или слушаніемъ лекцій, нужно дѣлать простые опыты и рѣшать простыя численныя задачи.

Что касается до Механики, то считаю себя въ правѣ думать, что инженеры механики, которые читаютъ эту книгу, знаютъ то, что помѣщено въ элементарныхъ отдѣлахъ моихъ руководствъ по Прикладной Механикѣ и Паровымъ и Газовымъ машинамъ. То есть, я предполагаю, что они имѣютъ элементарное понятіе объ изгибающемъ моментѣ въ балкахъ, работѣ силъ и коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія машинъ. Быть можетъ эта книга побудитъ ихъ только получить эти знанія. Я беру почти всѣ мои примѣры изъ инженерной практики, и, кто продѣлаетъ эти легкія упражненія, тотъ найдетъ, что онъ знаетъ самое существенное изъ того, что называется теоріей инженернаго дѣла.

3. Я знаю людей, сдѣлавшихъ выдающіяся изслѣдованія въ области математики, которые въ практической работѣ обращаются очень осторожно съ общепринятыми формулами, помѣщаемыми въ карманныхъ книжкахъ для инженеровъ. Какимъ-бы хорошимъ математикомъ ни считалъ себя студентъ, онъ долженъ упражняться въ рѣшеніи численныхъ примѣровъ,—найти, напримѣръ, a^b при помощи логариѳмическихъ таблицъ, гдѣ a и b какія нибудь числа. Напримѣръ, найти $\sqrt[3]{0.014}$, найти $2.365^{-0.26}$ и проч., взять какую нибудь формулу изъ карманной книжки и воспользоваться ею. Онъ не долженъ успокаивать себя тѣмъ, что онъ знаетъ, какъ это сдѣлать, онъ долженъ дѣйствительно выполнить численную работу. Онъ долженъ знать, что, если разстояніе опредѣлено въ 2.454, и если нѣтъ увѣренности въ точности послѣдней цифры, то довольно глупо было-бы при умноженіи или дѣленіи на это число получать отвѣтъ съ многими значащими цифрами, или, напримѣръ, сказать, что индикаторная сила паровой машины равна 324.65 лошадиныхъ силъ, когда индикаторъ можетъ давать ошибку въ 5% и болѣе. Онъ долженъ знать кратчайшій способъ для нахожденія произведенія 3.216×4571 съ четырьмя значащими цифрами. Онъ долженъ упражняться въ формулѣ приближенія

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha,$$

или $$(1 + \alpha)^n (1 + \beta)^m = 1 + n\alpha + m\beta,$$

если α и β малы, и провѣрить при $\alpha = 0.01$ или -0.01, или

$\beta = \pm 0.025$ и $n=2$, или $^1/_2$, или—$1^1/_3$ и $m=4$, или 2, или $^1/_3$, или при какихъ нибудь другихъ значеніяхъ, какая погрѣшность получится отъ примѣненія этихъ формулъ.

† Что касается до Тригонометріи, то опредѣленія должны быть извѣстны. Напримѣръ, начертимъ уголъ BAC, положимъ, въ 35^0. Возставимъ въ точкѣ B перпендикуляръ. Измѣряемъ самымъ тщательнымъ образомъ стороны AB, BC, AC. Вѣрна ли формула $AC^2+BC^2=AB^2$? Провѣрьте ее на числахъ. Теперь $\frac{BC}{AB} = \sin\ 35^0$, $\frac{AC}{AB} = \cos\ 35^0$, $\frac{BC}{AC} = \mathrm{tg}\ 35^0$. Сравните отвѣты съ тѣми, которые даны въ таблицахъ. Нужно научиться, какъ находить другія стороны треугольника ABC, когда мы знаемъ одну сторону и одинъ изъ острыхъ угловъ. Нужно понять также, что $\sin 130^0$—положителенъ, а $\cos 130^0$—отрицателенъ. Слѣдуетъ также убѣдиться при помощи таблицъ, вѣрно-ли равенство

$$\sin\ (A+B) = \sin\ A \,.\, \cos\ B + \cos\ A \,.\, \sin\ B,$$

гдѣ за A и B слѣдуетъ взять какихъ нибудь два угла. Есть три другія подобныя этой формулы. Есть еще четыре формулы подобнаго-же характера, получаемыя изъ вышеуказанныхъ формулъ черезъ сложеніе ихъ и вычитаніе. Вотъ одна изъ нихъ:

$$2\sin\alpha \,.\, \cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta);$$

также $$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1.$$

Я надѣюсь, что мои читатели, прежде чѣмъ пойдутъ дальше въ этой книгѣ, изучатъ полезную (элементарную и интересную) часть Тригонометріи и сами сдѣлаютъ выводы всѣхъ формулъ, если только они не сдѣлали этого уже раньше.

Вичислите уголъ $= 1.6$ радіановъ (1 радіанъ $= 57^0 296$); посмотрите, насколько отличается sinus и tangens этого угла отъ величины самаго угла. Помните, что, когда въ Математикѣ мы говоримъ о $\sin x$, то x предполагается выраженнымъ въ радіанахъ.

Я не ожидаю, чтобы читатель зналъ хорошо алгебру, но я предполагаю, что онъ умѣетъ дать корни выраженія,

напримѣръ $x^2+7x+12$ или x^2-a^2; я предполагаю также, что онъ умѣетъ упрощать выраженія. Инженеру не требуется знать перестановокъ и сочетаній, теорій уравненій, коническихъ сѣченій въ Геометріи или плоскостей, касательныхъ къ поверхностямъ. Счастливъ инженеръ, который также и хорошій математикъ, но встрѣчается немного людей, вполнѣ одаренныхъ этими двумя столь различными способностями.

Продолжительный опытъ въ мастерскихъ, инженеры и студенты убѣдили меня, что, если инженеръ путеецъ и нуждается для своихъ изысканій въ умѣніи рѣшать треугольники, то это и многіе другіе отдѣлы обычнаго математическаго образованія инженера на практикѣ безполезны для инженера механика или электрика. Это кажется парадоксомъ, но я отваживаюсь высказать это. Молодой инженеръ не можетъ посвящать слишкомъ много времени на простое упрощеніе алгебраическихъ и тригонометрическихъ выраженій, включая и выраженіе $\sqrt{-1}$, и самая большая услуга, оказываемая работами по элементарнымъ расчетамъ, заключается въ томъ, что онѣ побуждаютъ студентовъ снова приняться за это.

Но инженеръ не нуждается въ искусственной умственной гимнастикѣ, которую, напримѣръ, можно себѣ задать, упражняясь въ коническихъ сѣченіяхъ, или задавая себѣ безконечную возню съ выводами формулъ Высшаго Анализа помощью элементарной Математики. Результатомъ неправильности системы образованія можно считать хотя уже то, что многіе хорошіе инженеры не вѣрятъ въ то, что обыкновенно указываетъ имъ теорія.

4. Я предполагаю, что всякій изъ моихъ читателей уже основательно знакомъ съ главнѣйшими основами Анализа, только онъ не знаетъ ихъ въ алгебраической формѣ. Онъ имѣетъ отличное понятіе о скорости, но только ему не приходилось писать $\frac{dy}{dx}$; онъ имѣетъ отличное понятіе о площади, но не изучилъ еще символа, употребляемаго нами, $\int f(x).dx$. Онъ знаетъ идею, но не умѣетъ ее выразить въ этой формѣ.

Я предполагаю, что нѣкоторые изъ моихъ читателей знакомы съ трудными изслѣдованіями Анализа, что они могутъ дифференцировать нѣкоторыя функціи x'а и многія интегрировать; что они знаютъ, какъ продѣлывать разнообразныя трудныя задачи на различныя кривыя, напримѣръ, рулеты и на эллиптическіе интегралы, но и для нихъ я надѣюсь быть полезнымъ. Затруднительность ихъ положенія заключается въ томъ, что имъ кажется, что математическія ихъ познанія не приносятъ имъ пользы въ практическихъ инженерныхъ задачахъ. Стоитъ только дать ихъ x'амъ и y'амъ физическое значеніе или назвать ихъ вмѣсто прежняго p и v, какъ уже то, что было самымъ легкимъ упражненіемъ въ книгѣ, становится для нихъ трудной задачей. Я знаю такихъ людей, которые поспѣшно пропускаютъ при чтеніи книги тѣ мѣста, гдѣ они увидятъ $\frac{dp}{dt}$, или знакъ интеграла.

5. Когда я началъ писать эту книгу, я думалъ изложить предметъ передъ моими читателями настолько же, насколько мнѣ удавалось, и даже повидимому, съ большимъ успѣхомъ, излагать его передъ студентами на вечернихъ классахъ; но многое можно сдѣлать на лекціяхъ, чего не сдѣлаешь, хладнокровно сидя дома за своимъ столомъ. Тамъ видишь передъ собой устремленные со вниманіемъ взоры слушателей, по которымъ сразу замѣтишь, когда необходимо еще нѣкоторое поясненіе предмета, или когда идея уже схвачена. Идею можно представить, начертивъ кривую, или пояснить ее тамъ же на предметахъ, находящихся въ аудиторіи.

Пусть читатель дѣлаетъ пропуски со смысломъ. Пусть онъ не дѣлаетъ задачи, которая не представляетъ для него интереса по его профессіи. Задачъ много, но самый лучшій способъ обученія — это тщательное изученіе только немногихъ изъ нихъ.

На читателя возлагается надежда, что онъ часто будетъ возвращаться къ предъидущимъ отдѣламъ.

Книга вышла бы слишкомъ обширной, еслибы я включилъ въ нее еще нѣкоторыя, хотя и очень интересныя и поучительныя, инженерныя задачи.

Я откладываю до будущаго случая то, что для многихъ студентовъ можетъ быть было бы болѣе интересною частью моего предмета, а именно, примѣры въ инженерной наукѣ (иногда называемой „Прикладной Физикой") рѣшенія частныхъ дифференціальныхъ уравненій. Многіе считаютъ этотъ вопросъ однимъ изъ тѣхъ, которые не могутъ быть хорошо изложены элементарно, но лордъ Kelvin давно показалъ мнѣ, что нѣтъ ни одного полезнаго математическаго орудія, пользоваться которымъ не могъ бы научиться инженеръ. Человѣкъ учится пользоваться анализомъ такъ же, какъ онъ учится владѣть долотомъ или пилой при обработкѣ твердыхъ кусковъ матеріала, и эту же идею я преслѣдую при обученіи инженеровъ тому, какъ пользоваться высшимъ анализомъ.

Эта книга не имѣетъ своей цѣлью отвергать общепринятыя научныя положенія, но она скорѣе является введеніемъ къ нимъ. Въ первой главѣ я не пытаюсь дифференцировать или интегрировать какія либо другія функціи x'а, кромѣ x^n. Во второй главѣ я имѣю дѣло съ e^{ax}, и $\sin(ax+c)$. Третья глава болѣе трудна.

Для упражненія въ элементарной алгебрѣ и для пользованія ею въ инженерныхъ задачахъ я помѣстилъ рядъ упражненій на дифференцированіе и интегрированіе.

Отдѣлы, напечатанные мелкимъ шрифтомъ, и примѣчанія нѣкоторыми студентами при первоначальномъ чтеніи книги могутъ быть найдены слишкомъ трудными. Нѣкоторыя упражненія могутъ иногда потребовать бо́льшихъ знаній, чѣмъ тѣ, которыми обладаетъ студентъ. Въ такихъ случаяхъ онъ свободно можетъ сдѣлать пропускъ.

ГЛАВА I.

X^n.

6. Всякій имѣетъ уже понятіе о **геометрическихъ координатахъ** и **клѣтчаткѣ**. Клѣтчатку можно купить по семи пенсовъ за десть: тѣ, кто не знаютъ этого и платятъ по семи или четырнадцати пенсовъ за листъ имѣютъ слишкомъ преувеличенное представленіе о стоимости этой бумаги, чтобы пользоваться ею.

Когда **купецъ** имѣетъ къ своимъ услугамъ листъ клѣтчатки съ точками, лежащими на кривой, которую онъ удлиняетъ со дня на день, причемъ каждая точка показываетъ цѣну желѣза, или мѣди, или бумажной пряжи, или шелка на каждый день, то онъ пользуется геометрическими координатами. Теперь, для какихъ же цѣлей онъ будетъ пользоваться подобной кривой? 1. Онъ видитъ, какова была цѣна въ любое число года. 2. Онъ видитъ по *уклону* своей кривой *быстроту* поднятія или паденія цѣны. 3. Если онъ на томъ самомъ листѣ въ продолженіе того же промежутка времени будетъ строить кривыя для другихъ предметовъ, то онъ замѣтитъ, какое дѣйствіе производитъ поднятіе или паденіе ихъ цѣны на цѣну его матеріала, и это можетъ сдѣлать его способнымъ предугадывать цѣну и такимъ образомъ наживать деньги. 4. Изслѣдованіе его кривой за прошедшее время даетъ ему возможность дѣлать предсказанія съ большей степенью вѣроятности, чѣмъ это можетъ сдѣлать человѣкъ, который не имѣетъ никакихъ записей по этому вопросу.

Замѣтимъ, что **любая точка представляетъ двѣ величины**; ея горизонтальное разстояніе отъ нѣкоторой опредѣленной линіи, или оси называется одной координатой, мы обыкно-

венно называемъ ее координатой x, и она измѣряется по горизонтальному направленію направо отъ оси y; многіе называютъ ее *абсциссой*; въ нашемъ случаѣ она представляетъ время. Другая координата (мы обыкновенно называемъ ее координатой y, или просто *ординатой*) есть вертикальное разстояніе данной точки отъ нѣкоторой опредѣленной прямой линіи, или оси; это разстояніе представляетъ цѣну. Въ газетахъ вы найдете кривыя, показывающія, какъ поднимается или падаетъ термометръ или барометръ. Однажды въ дорогѣ я читалъ одну довольно интересную статью, трактующую о постепенномъ ходѣ прироста англійскаго народонаселенія, его благосостоянія и налоговъ; за ходомъ разсужденій было очень трудно слѣдить, между тѣмъ, еслибы взять цифровыя данныя, приводимыя авторомъ, и нанести ихъ на клѣтчаткѣ, то всякій выводъ, объяснить который стоило ему такъ много труда, былъ бы такъ ясенъ, благодаря кривымъ, что даже мальчикъ могъ бы понять его. Вотъ причина, вѣроятно, почему нѣкоторые писатели не пользуются въ печати кривыми: еслибы они дѣлали это, то имъ очень немного пришлось бы писать.

7. Лицо, производящее **опыты**, обыкновенно старается узнать, какъ одна величина, которую я назову y, зависитъ отъ нѣкоторой другой величины, которую назову x. Такимъ образомъ, напримѣръ, давленіе p насыщеннаго пара (вода и паръ находятся въ сосудѣ, а не на воздухѣ или въ какой либо другой жидкости) постоянно при той же температурѣ. Кривая, начерченная на клѣтчаткѣ даетъ намъ возможность для любой данной температуры найти давленіе, или обратно, она показываетъ отношеніе между приращеніями того и другого и многое другое. Я не говорю, что для полученія справокъ кривая удобнѣе, чѣмъ таблица; нѣкоторыя справки лучше получать изъ кривыхъ, нѣкоторыя изъ таблицъ. Замѣтьте, что, когда мы изображаемъ нѣкоторую величину длиною линіи, то мы изображаемъ ее въ томъ или другомъ масштабѣ; 1 дюймъ можетъ представлять 10 фунтовъ на квадр. дюймъ, или 20 градусовъ стоградуснаго термометра и что либо другое, но всегда это означаетъ условное сравненіе, ибо, конечно, 1 дюймъ есть вещь совершенно отличная отъ 20 градусовъ термометра.

Когда кто либо имѣетъ два ряда наблюденныхъ цифръ съ намѣреніемъ нанести ихъ на клѣтчаткѣ, то онъ дѣлаетъ это, во первыхъ, для того, чтобы видѣть, не лежатъ ли точки на какой либо правильной кривой. Если такъ, то, чѣмъ проще кривая, тѣмъ проще тотъ законъ, который мы хотимъ найти. Во вторыхъ, чтобы исправить ошибки наблюденій. Дѣйствительно, если точки ложатся почти на простой правильной кривой, то, если мы начертимъ кривую, которая ложится ближе всего къ точкамъ, при помощи хорошаго деревяннаго лекала, мы можемъ тогда сказать, что она можетъ быть принята какъ самая подходящая, такъ какъ, еслибы не было никакихъ ошибокъ въ наблюденіяхъ, точки легли бы прямо на такой кривой. Замѣтимъ, что, когда мы говоримъ, что точка лежитъ на разстояніи —5 фут., направо отъ линіи, мы предполагаемъ, что она лежитъ на разстояніи 5 фут. влѣво отъ линіи. Послѣ долгаго опыта я убѣдился, что вполнѣ стоитъ потратить порядочно времени на вычитаніе и перемноженіе различныхъ количествъ, чтобы приспособиться къ счету квадратиковъ, прежде чѣмъ приступать къ вычерчиванію (пусть на это уйдетъ хоть цѣлый листъ бумаги).

Теперь пусть читатель купитъ побольше клѣтчатки и, не прося отъ кого либо помощи, нанесетъ на нее результаты какихъ нибудь наблюденій. Пусть, напримѣръ, онъ возьметъ Альманахъ Whitaker'a и нанесетъ изъ него нѣсколько рядовъ чиселъ; среднюю температуру каждаго мѣсяца прошлаго года; національный государственный долгъ съ 1688 года; стоимость 4%-й ренты за нѣкоторое число лѣтъ; капиталъ, затраченный на постройку желѣзныхъ дорогъ съ 1849 года; какъ бы тамъ ни было, но лучше, если онъ возьметъ величины, которыя для него интересны. Если онъ производитъ лабораторныя наблюденія, то онъ съ захватывающимъ интересомъ будетъ смотрѣть, какого вида законъ даетъ ему клѣтчатка.

8. Такъ какъ наблюденія могутъ производиться надъ давленіемъ p и температурой t, или p и объемомъ v, или v и t, или надъ индикаторными и полезными лошадиными силами паровой или газовой машины, или надъ амперами и вольтами въ электричествѣ, а мы желаемъ говорить вообще

съ какой нибудь парѣ величинъ, то я буду пользоваться x'ами и y'ами вмѣсто p, v, t и другихъ различныхъ буквъ. Самое короткое обозначеніе закона, связывающаго двѣ перемѣнныхъ величины x и y есть $F(x, y) = 0 \ldots (1)$, или на словахъ „есть нѣкоторое уравненіе, связывающее x и y". Нѣкоторое выраженіе, содержащее x и y (оно можетъ содержать также и многія другія буквы и числа), называется *функціей* отъ x'а и y'а, и мы пользуемся такими символами, какъ $F(x, y)$, $f(x, y)$, $Q(x, y)$ и пр. для того, чтобы представить функціи въ общемъ видѣ, когда мы не знаемъ, каковъ ихъ дѣйствительный видъ, и часто, когда мы знаемъ, но желаемъ написать ихъ въ краткой формѣ. Затѣмъ мы пользуемся $F(x)$, $f(x)$ или другимъ какимъ нибудь подходящимъ символомъ, чтобы обозначить „нѣкоторое математическое выраженіе, содержащее x", и говоримъ „пусть $f(x)$ есть нѣкоторая функція x'а". Такимъ образомъ $y = f(x) \ldots (2)$ обозначаетъ нѣкоторое уравненіе, которое должно давать намъ возможность вычислить y по данному x.

Законъ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ имѣетъ видъ формулы (1), данной выше, между тѣмъ, какъ если вычислимъ y въ зависимости отъ x, то получимъ $y = \pm {}^4/_5 \sqrt{25 - x^2}$ — формула (2). Но и въ томъ, и другомъ случаѣ мы имѣемъ ту же самую зависимость, связывающую y и x. Въ чистой Математикѣ x и y являются дѣйствительными длинами; въ прикладной Математикѣ x и y представляютъ собой опредѣленныя величины, которыя мы сравниваемъ, и которыя изображаются въ масштабѣ.

9. Графическія упражненія.

I. Начертить кривую $y = 2 + {}^1/_{30}\, x^2$.

Возьмемъ $x = 0$ и находимъ $y = 2$; возьмемъ $x = 1$, тогда $y = 2{\cdot}0333$; возьмемъ $x = 2$; тогда $y = 2 + 0{\cdot}133 = 2{\cdot}133$ и т. д. Далѣе нанесемъ эти значенія x'овъ и y'овъ на нашъ листъ клѣтчатки. Кривая—парабола.

II. Начертить кривую $y = 2 - {}^1/_5 x + {}^1/_{30} x^2$, которая есть также парабола, тѣмъ же самымъ способомъ на томъ же листѣ бумаги.

III. Начертить кривую $xy = 120$. Если $x = 1$, $y = 120$; если $x = 2$, $y = 60$; если $x = 3$, $y = 40$; если $x = 4$, $y = 30$ и т. д. Эта кривая—прямоугольная гипербола.

IV. Начертить $yx^{1.414} = 100$ или $y = 100x^{-1.414}$. Если студентъ не сумѣетъ вычислить y для любого значенія x, то стало быть онъ не умѣетъ пользоваться логариѳмами и тѣмъ скорѣе онъ долженъ научиться какъ можно лучше умѣть пользоваться ими.

V. Начертить $y = ax^n$, гдѣ a — нѣкоторое число. Я совѣтую студенту потратить порядочно времени на вычерчиваніе членовъ этой большой семьи полезныхъ кривыхъ. Пусть онъ попробуетъ $n = -1$ (онъ уже чертилъ это въ III выше), $n = -2$, $n = -1^1/_2$, $n = -^1/_2$, $n = -0{\cdot}1$, $n = 0$, $n = ^1/_2$, $n = ^3/_4$, $n = 1$, $n = 1^1/_2$, $n = 2$ (это въ № 1 выше), $n = 3$, $n = 4$ и т. д.

VI. Начертить $\mathbf{y = a \sin (bx + c)}$, беря подходящія числа для a, b и c.

Совѣтъ. Такъ какъ $bx + c$ выражено въ *радіанахъ* (одинъ радіанъ $= 57{\cdot}2958$ градусовъ), а таблицы обыкновенно даютъ углы въ градусахъ, то подбираемъ для b и c числа, которыя сдѣлаютъ ариѳметическую работу болѣе легкой. Итакъ беремъ b равнымъ $\frac{1}{114{\cdot}6}$, а c беремъ равнымъ числу радіановъ, которое соотвѣтствуетъ углу въ 30^0

$$\left(\text{это } \frac{\pi}{6} \text{ или } 0{\cdot}5236\right).$$

Пусть $a = 5$. Теперь пусть $x = 0, 10, 20$ и т. д., и вычисляемъ y.

Такимъ образомъ, когда $x = 6$, $y = 5 \sin \left(\frac{6}{114{\cdot}6} + 0{\cdot}5236\right)$; но если уголъ выразить въ *градусахъ*, то имѣемъ

$$y = 5 \sin (^1/_2 6 + 30 \text{ градусовъ}) = 5 \sin 33^0 = 2{\cdot}723.$$

Начертивъ вышеуказанную кривую, замѣтьте, какая перемѣна произойдетъ, если c будетъ замѣнено 0, или $\frac{\pi}{4}$; или $\frac{\pi}{3}$, или $\frac{\pi}{2}$. Затѣмъ, если a будетъ измѣнено. Съ большой пользой можно истратить на эти кривыя болѣе недѣли.

VII. Начертить $y = ae^{bx}$. Принимаемъ $a = 1$ и $b = 1$; пробуемъ другія значенія для a и b; возьмемъ, наконецъ, два случая отрицательнаго значенія для b.

Въ вышеуказанной работѣ слѣдуетъ, насколько возможно, обходиться безъ помощи учителей, но помощь со стороны товарища студента будетъ очень полезна, особенно, если возникаютъ споры по этому вопросу.

Причина, почему я долго останавливался на вышеприведенныхъ семи случаяхъ, слѣдующая: студенты обыкновенно учатся дифференцировать и интегрировать самыя сложныя выраженія, но, когда самыя простыя изъ этихъ выраженій являются передъ ними въ дѣйствительной инженерной задачѣ, они чувствуютъ передъ ними страхъ. Далѣе очень рѣдко бываетъ, чтобы инженеръ даже въ самыхъ трудныхъ случаяхъ своей теоретической работы столкнулся съ задачей, которая требовала бы знанія болѣе, чѣмъ слѣдующихъ трехъ функцій.

$$y = ax^n, \quad y = a \sin (bx + c), \quad y = ae^{bx},$$

но эти три должны быть особенно хорошо усвоены, и студентъ техникъ долженъ смотрѣть на изученіе ихъ, какъ на самую важную часть своей теоретической подготовки.

Изслѣдованіе этихъ трехъ видовъ выраженій—весьма важная вещь для студента. Я однако не вижу причинъ, почему бы ради маленькаго развлеченія ему не заняться вычерчиваніемъ и такихъ кривыхъ, какъ

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ (кругъ)}, \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ (эллипсъ)},$$

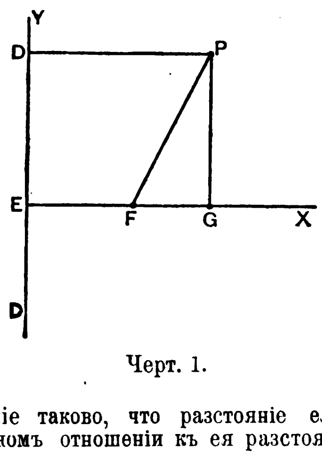
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ (гипербола)},$$

а также и нѣкоторыхъ другихъ, указываемыхъ въ главѣ III, но съ инженерной точки зрѣнія эти кривыя сравнительно не интересны.

10. Изучивъ $y = e^{-ax}$ и $y = b \sin (cx + g)$, студентъ найдетъ, что онъ можетъ уже легко справиться съ одной изъ самыхъ важныхъ въ инженерномъ дѣлѣ кривыхъ, а именно

$$y = be^{-ax} \sin (cx + g).$$

Онъ долженъ сначала взять такую кривую, которую онъ уже изучалъ, $y = b \sin (cx + g)$; начертить на томъ же листѣ клѣтчатки $y = e^{-ax}$ и, перемноживъ ординаты двухъ кривыхъ одну на другую для нѣсколькихъ значеній x, найти ординаты новой кривой. Кривая, очевидно, волнообразна, такъ какъ y имѣетъ максимальныя и минимальныя значенія; y представляетъ отклоненіе чашки маятника или стрѣлки какого нибудь измѣрительнаго прибора, движеніе которой затрудняется жидкостью или другимъ подобнымъ треніемъ, при чемъ x представляетъ время, и студентъ пойметъ кривую гораздо лучше, если будетъ производить наблюденія надъ подобнымъ движеніемъ, напримѣръ, съ свинцовымъ дискомъ, погруженнымъ въ масло, колеблющимся такъ медленно подъ вліяніемъ вращающихъ усилій въ проволокѣ, что можно въ одно качаніе сдѣлать много наблюденій надъ его угловымъ положеніемъ, которое называется y, при чемъ x представляетъ время (измѣреніе производится при помощи стрѣлки и шкалы градусовъ). Разстояніе или уголъ между крайними положеніями стрѣлки съ одной и другой стороны отъ нуля называется длиною одного качанія. Неперовъ логариѳмъ отношенія длины одного качанія къ длинѣ слѣдующаго или одна десятая логариѳма отношенія перваго качанія къ одинадцатому, очевидно, равна a, умноженному на половину продолжительности періода, или a, умноженному на время *одного качанія*. Это **логариѳмическое приращеніе** довольно важно для нѣкоторыхъ измѣреній.



Черт. 1.

11. Когда посредствомъ чертежа или модели мы можемъ найти **траэкторію нѣкоторой точки** и опредѣлить, гдѣ она находится на ней въ любой моментъ, когда намъ извѣстно положеніе нѣкоторой другой точки, то мы можемъ получить тѣ же результаты алгебраически.

Примѣръ (*1*). Даны точка F и прямая линія DD; какова траэкторія точки P, если ея движеніе таково, что разстояніе ея отъ точки F находится въ постоянномъ отношеніи къ ея разстоянію отъ прямой линіи DD?

Итакъ на чертежѣ $PF = e \times PD \ldots (1)$, гдѣ e—постоянно.

Приводимъ EFX подъ прямымъ угломъ къ DD. Пусть разстояніе PD называется x, а перпендикуляръ PG называется y; наша задача слѣдующая: каково уравненіе, связывающее x и y? Мы должны теперь выразить (1) черезъ x и y. Обозначимъ EF черезъ a. Тогда

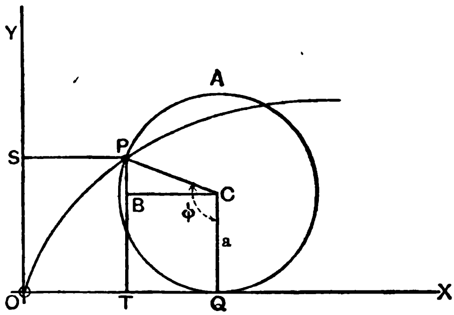
$$PF = \sqrt{PG^2 + FG^2} = \sqrt{y^2 + (x-a)^2},$$

такъ что, возводя въ квадратъ, мы имѣемъ

$$y^2 + (x-a)^2 = e^2x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Это и есть отвѣтъ. Если $e = 1$, кривая будетъ **параболой.** Если e больше единицы, кривая — **гипербола.** Если e меньше единицы, кривая—**эллипсъ.**

Примѣръ (*2*). Кругъ APQ катится по прямой линіи OX. Какова траэкторія нѣкоторой точки окружности? Положимъ, что,



Черт. 2.

когда точка P касалась линіи OX, она была въ O, пусть OX и OY будутъ координатныя оси, и пусть SP будетъ x и PT будетъ y.

Уголъ PCQ обозначимъ черезъ ψ. Проведемъ CB перпендикулярно къ PT.

Замѣтимъ, что

$$PB = a \sin PCB = a \sin(\psi - 90) = -a \cos \psi,$$

$$BC = a \cos PCB = a \sin \psi$$

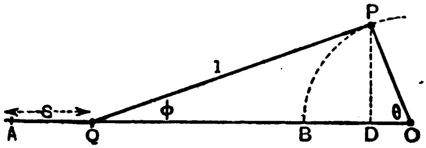
Далѣе, дуга $QP = a\psi = OQ$. Отсюда $x = OQ - BC$ и $y = BT + PB$, имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} x = a\psi - a \sin \psi \\ y = a - a \cos \psi \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Если мы изъ выраженія (3) исключимъ ψ, мы получимъ одно уравненіе, связывающее x и y. Но лучше сохранить ψ и имѣть два

уравненія вслѣдствіе того, что ихъ легче рѣшать. Два уравненія (3) дѣйствительно могутъ считаться уравненіемъ кривой. Кривая эта называется **циклоидой**, какъ это навѣрное знаютъ всѣ мои читатели.

Примѣръ (*3*). **Мотыль и шатунъ** заставляютъ двигаться ползунъ по прямой линіи. Гдѣ находится ползунъ при нѣкоторомъ положеніи



Черт. 3.

мотыля? Пусть траэкторія ползуна лежитъ на одной прямой съ центромъ вращенія мотыля. Если A конецъ траэкторіи ползуна, то, очевидно, AO равно $l+r$, гдѣ r—длина мотыля.

Не мѣшаетъ помнить во всѣхъ подобныхъ задачахъ, что, если мы проектируемъ всѣ стороны замкнутой фигуры на нѣкоторыя двѣ прямыя линіи, то мы получаемъ два независимыхъ уравненія.

Проектируя на горизонтальную линію, мы видимъ, что

Проектируя на вертикаль

$$\left.\begin{aligned} s+l\cos\psi+r\cos\theta &= l+r \\ l\sin\psi &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

Если мы исключимъ ψ изъ этихъ двухъ уравненій, то мы можемъ вычислить s для любого значенія θ. Студентъ долженъ былъ бы сдѣлать этотъ выводъ самъ, но я по слабости характера привожу его здѣсь

$$\cos\psi=\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta},$$

такъ что первое равенство принимаетъ видъ

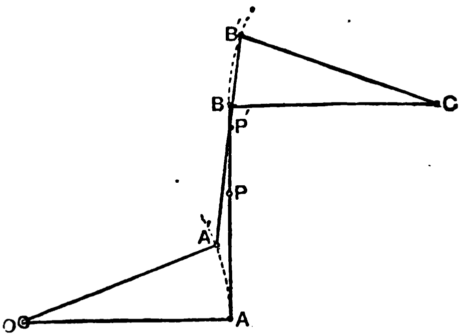
$$s=l\left\{1-\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}\right\}+r(1-\cos\theta)^* \quad \ldots\ldots (2)$$

---

*) Замѣтимъ, что, если, какъ это бываетъ обыкновенно, $\frac{r^2}{l^2}$ очень малая дробь, то тогда $\sqrt{1-\alpha}=1-{}^1/_2\,\alpha$, когда α—мало, и мы можемъ найти приблизительную величину s, которая можетъ быть выражена черезъ θ и 2θ. Этотъ вопросъ важнѣе, чѣмъ онъ кажется здѣсь. Когда прямая траэкторія точки Q образуетъ уголъ α съ линіей, соединяющей ея середину съ точкой O, то, если уголъ α не великъ, очевидно, что S почти тоже самое, что и въ предъидущемъ случаѣ, только дѣленное на $\cos\alpha$. Когда уголъ α— великъ, алгебраическое выраженіе для S дѣлается гораздо сложнѣе, но всегда можно найти достаточно удобныя приближенія, которыя спасутъ отъ значительныхъ трудностей вычисленій.

Студенты должны продѣлать нѣсколько упражненій, подобныхъ слѣдующимъ:— 1. Концы A и B стержня направляются двумя прямыми поперечинами OB и OA, которыя расположены подъ прямымъ угломъ одна къ другой; найти уравненіе траэкторіи нѣкоторой точки P на стержнѣ. 2. При движеніи параллелограма Уатта на немъ есть точка, которая движется почти по прямой траэкторіи. Найти уравненіе ея сложной траэкторіи.

На черт. 4 показано среднее положеніе $OABC$. Самое лучшее мѣсто для P такое, при которомъ $BP:PA = OA:CB$. Начертимъ соединенія въ нѣкоторомъ другомъ положеніи. Сложная траэкторія



Черт. 4.

должна представиться въ видѣ цифры 8. 3. Найти уравненіе траэкторіи точки. лежащей по срединѣ обыкновеннаго шатуна. 4. Одинъ конецъ стержня A движется по прямой траэкторіи COC', гдѣ O—средина траэкторіи; по закону простого гармоническаго движенія $OA = a \sin pt$, гдѣ t — время, другой конецъ B движется по прямому пути OBD, который составляетъ прямой уголъ съ COC'. Каково движеніе точки B? Показать, что оно приблизительно простое гармоническое съ двойнымъ числомъ періодовъ сравнительно съ A. 5. Нѣкоторый парораспредѣлительный механизмъ состоитъ изъ различныхъ связей и т. д., приводимыхъ въ движеніе равномѣрно вращающимся мотылемъ; замѣтьте тотъ фактъ, что движеніе въ нѣкоторомъ направленіи какой либо точки, лежащей на одной изъ связей, состоитъ изъ основного простого гармоническаго движенія одинаковаго числа періодовъ съ мотылемъ, соединеннаго съ октавой. Подробное изученіе съ этой точки зрѣнія движенія связей и радіальныхъ парораспредѣлительныхъ механизмовъ стоитъ нѣсколько мѣсяцевъ труда, такъ какъ въ этомъ заключается секретъ, почему одно движеніе золотника даетъ лучшую діаграмму, чѣмъ другое. Возьмемъ напримѣръ механизмъ Hackworth'а съ кривой поперечиной и съ прямой. Какая будетъ разница? См. пунктъ 122.

12. Случай, когда точки ложатся на одной прямой. Доказательства будутъ представлены послѣ; сначала студентъ долженъ хорошо ознакомиться съ тѣмъ, что онъ долженъ доказать. Я знаю мальчиковъ, которые умѣютъ *доказывать* математическія положенія, но не съумѣютъ объяснить то, что они доказали, пока не пройдетъ нѣсколько лѣтъ.

Возьмемъ нѣкоторое выраженіе, подобное $y = a + bx$, гдѣ a и b какія нибудь числа. Пусть $y = 2 + 1^1/_2x$. Теперь возьмемъ $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и т. д. и въ каждомъ случаѣ вычислимъ соотвѣтствующую величину y. Нанесемъ на клѣтчатку соотвѣтственныя величины x и y, какъ координаты точекъ. Вы найдете, что они лежатъ точно на прямой линіи. Далѣе, будетъ ли $y = 2 + 3x$, или $2 + {}^1/_2x$, или $2 - 3x$, или $2 - {}^1/_2x$, во всѣхъ случаяхъ вы будете имѣть дѣло съ прямой линіей. Тѣ, кто уже знаютъ кое что объ этомъ предметѣ, не станутъ этимъ смущаться, и вамъ, если вы не принадлежите къ нимъ, тоже не совѣтую смущаться этимъ, хотя и сознаю, что вы имѣете на это право. Замѣтьте пока, что въ каждомъ случаѣ я давалъ вамъ туже самую величину a, и, слѣдовательно, всѣ ваши линіи имѣютъ нѣчто общее. Въ чемъ же оно заключается? Находимъ, что a есть величина y при $x = 0$.

Затѣмъ беремъ

$$y = 2 + 1^1/_2x,\quad y = 1 + 1^1/_2x,\quad y = 0 + 1^1/_2x,\quad y = -1 + 1^1/_2x,\quad y = -2 + 1^1/_2x,$$

и также посмотримъ, что означаетъ, когда b одинаково во всѣхъ случаяхъ. Вы найдете, что всѣ линіи съ одинаковымъ b имѣютъ одинъ и тотъ же уклонъ, и въ самомъ дѣлѣ я обыкновенно называю b уклономъ линіи.

Если $y = a + bx$, то при $x = x_1$, опредѣлимъ y и обозначимъ его y_1, когда $x = x_1 + 1$, находимъ y и называемъ его y_2.

Легко показать, что $y_2 - y_1 = b$. Итакъ то, что я называю уклономъ прямой линіи, есть ея подъемъ на горизонтальномъ протяженіи равномъ 1. (Замѣтимъ, что, когда мы говоримъ, что дорога идетъ подъемомъ въ $^1/_{20}$ или 1 на 20, то мы подразумѣваемъ, что 1 футъ подъема приходится на 20 фут. протяженія поднимающейся дороги. Такимъ образомъ $^1/_{20}$ есть синусъ угла наклоненія дороги къ го-

ризонту, тогда какъ нашъ уклонъ измѣряется нѣкоторымъ другимъ способомъ). Нашъ *уклонъ* есть, очевидно, тангенсъ угла наклоненія линіи къ горизонту. Разсматривая y, какъ количество, величина котораго зависитъ отъ величины x, замѣтимъ, что *отношеніе приращенія* y *къ приращенію* x постоянно, при чемъ оно дѣйствительно равно величинѣ b— уклону линіи. Символъ, употребляемый для обозначенія этой величины, есть $\frac{dy}{dx}$. Замѣтимъ, что это только одинъ символъ. Его не должно считать за $\frac{d\times y}{d\times x}$. Слѣдуетъ постараться запомнить положеніе, что, если $y=a+bx$, то $\frac{dy}{dx}=$ $=b$ и что, если $\frac{dy}{dx}=b$, то $y=A+bx$, гдѣ A нѣкоторое постоянное число.

Всякое уравненіе первой степени, связывающее x и y подобное $Ax+By=C$, гдѣ A, B и C—постоянныя, можетъ быть представлено въ видѣ $y=\frac{C}{B}-\frac{A}{B}x$, такъ что это есть уравненіе прямой линіи, уклонъ которой $=-\frac{A}{B}$ и которая проходитъ черезъ точку, для которой при $x=0$, $y=\frac{C}{B}$, называемую точкой $\left(0, \frac{C}{B}\right)$. Такимъ образомъ $4x+2y=5$ проходитъ черезъ точку $x=0$, $y=2^1/_2$ при уклонѣ равномъ -2, т. е. съ уменьшеніемъ y по мѣрѣ увеличенія x. Надѣюсь, что вы начертите линію $y=2^1/_2-2x$ и найдете ея отличіе отъ линіи $y=2^1/_2+2x$. Замѣтьте, что подразумѣвается подъ положительнымъ и отрицательнымъ уклономъ. Начертите нѣсколько кривыхъ и опредѣлите приблизительно на глазъ уклонъ ихъ въ нѣсколькихъ мѣстахъ.

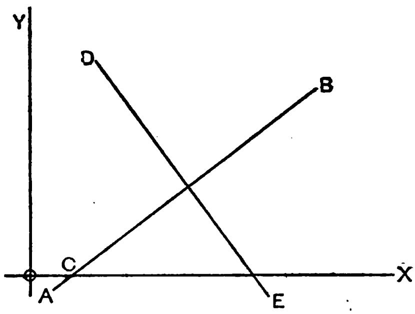
13. Задачи на прямую линію.

1. Данъ уклонъ прямой линіи; если вы прибавите еще условіе, что она проходитъ черезъ точку $x=3$, $y=2$, то каково уравненіе этой линіи? Пусть уклонъ будетъ 0·35.

Уравненіе должно имѣть видъ $y = a + 0{\cdot}35x$, гдѣ a — неизвѣстно.

Но (3,2) есть точка на этой линіи, слѣдовательно $2 = a + 0{\cdot}35 \times 3$, или $a = 0{\cdot}95$, отсюда уравненіе линіи, $y = 0{\cdot}95 + 0{\cdot}35\,x$.

2. Каковъ уклонъ нѣкоторой линіи, проходящей подъ прямымъ угломъ къ линіи $y = a + bx$? Пусть AB будетъ данная линія, пересѣкающая OX въ точкѣ C. Тогда $b =$



Черт. 5.

$= tg\,BCX$. Если DE есть нѣкоторая линія, проходящая подъ прямымъ угломъ къ первой, то ея уклонъ будетъ $tg\ DEX$ или $-tg\ DEC$ или $-cotg\ BCE$ или $-\dfrac{1}{b}$.

Итакъ $y = A - \dfrac{1}{b}x$ есть типичное уравненіе всѣхъ линій, наклоненныхъ подъ прямымъ угломъ къ линіи $y = a + bx$; A — нѣкоторое постоянное.

3. Гдѣ точка пересѣченія двухъ линій $Ax + By + C = 0$ и $Mx + Ny + S = 0$? Отвѣтъ, въ точкѣ съ координатами x и y, удовлетворяющими обоимъ уравненіямъ. Такимъ образомъ намъ нужно рѣшить систему двухъ уравненій, на что даетъ намъ отвѣтъ элементарная Алгебра.

4. Когда $tg\alpha$ и $tg\beta$ извѣстны, то легко найти $tg(\alpha - \beta)$, а слѣдовательно, когда даны двѣ прямыя $y = a + bx$ и $y = m + nx$, то легко найти уголъ между ними.

5. Линія $y = a + bx$ проходитъ черечъ точки $x = 1$, $y = 2$ и $x = 3$, $y = 1$; найти a и b.

6. Линія $y = a + bx$ направлена подъ прямымъ угломъ къ линіи $y = 2 + 3x$ и проходитъ черезъ точку $x = 1$, $y = 1$. Найти a и b.

14. Полученіе эмпирическихъ формулъ.

Когда въ лабораторіи мы произвели измѣренія двухъ величинъ, которыя зависятъ одна отъ другой, мы имѣемъ таблицу, показывающую соотношеніе между этими двумя величинами, и, желая узнать, нѣтъ ли простого отношенія между ними, наносимъ эти величины въ подходящемъ масштабѣ, какъ координаты точекъ на клѣтчатку. Если нѣкоторая правильная кривая (кривая безъ особенныхъ точекъ, какъ я впослѣдствіи буду ее называть), повидимому, можетъ пройти черезъ всѣ точки, исключая возможныхъ ошибокъ измѣренія, то мы пробуемъ получить формулу $y = f(x)$, которая можетъ быть названа закономъ, или соотношеніемъ, связывающимъ величины, названныя x и y.

Если точки, повидимому, лежатъ на прямой линіи, то, чтобы найти самое вѣроятное ея положеніе, пользуются натянутой нитью. Есть скучный алгебраическій методъ нахожденія прямой линіи, которая соотвѣтствуетъ положенію точекъ, съ наименьшей ошибкой, но для чисто инженерныхъ цѣлей методъ натянутой нити даетъ достаточную точность.

Если кривая слѣдуетъ, повидимому, такому закону, какъ $y = a + bx^2$, то наносимъ y и квадратъ наблюденной величины, которую мы называемъ x, какъ координаты точекъ, и посмотримъ, лежатъ ли онѣ на прямой линіи. Если кривая, повидимому, слѣдуетъ такому закону, какъ $y = \frac{ax}{1 + bx} \ldots (1)$, что равносильно $\frac{y}{x} + by = a$, то дѣлимъ каждое изъ количествъ, которыя мы называемъ y, на соотвѣтствующую величину x. Назовемъ это отношеніе X. Теперь нанесемъ величины X и y на клѣтчаткѣ; если прямая линія проходитъ черезъ нанесенныя точки, то, значитъ, мы имѣемъ законъ $X = A + By$, или $\frac{y}{x} = A + By$, или $y = \frac{Ax}{1 - Bx}$, слѣдовательно, (1)—правильно.

Обыкновенно мы можемъ примѣнять методъ натянутой нити, когда находимъ вѣроятность существованія закона, содержащаго только двѣ постоянныхъ.

Такъ предположимъ, что мы беремъ измѣренія изъ той части индикаторной діаграммы газовой машины, которая соотвѣтствуетъ расширенію. Для многихъ цѣлей важно получить эмпирическую формулу, связывающую p и v—давленіе и объемъ. Я всегда находилъ, что прекрасную точность даетъ соотношеніе $pv^s = C$, гдѣ s и C—двѣ постоянныя. Для насъ не особенно важно знать C, но, если дѣйствительно существуетъ такое соотношеніе, то весьма важна вели-

чина s *). Чтобы испытать, имѣетъ ли мѣсто это соотношеніе, наносимъ log p и log v, какъ координаты точекъ на клѣтчаткѣ (въ этомъ случаѣ можно взять и обыкновенные логариѳмы). Если онѣ ложатся приблизительно на прямой линіи, то мы видимъ, что

$$\log p + s \log v = c$$

постоянному, и стало быть это соотношеніе дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

Когда мы желаемъ сдѣлать пробу съ формулой, содержащей три независимыя постоянныя, то часто бываетъ, что мы можемъ привести ее къ виду

$$Av + Bw + Cz = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

гдѣ v, w и z содержатъ x и y въ нѣкоторомъ видѣ. Такъ сдѣлаемъ пробу съ формулой $y = \frac{a + bx}{1 + cx}$: мы имѣемъ $y + cxy = a + bx$ или $\frac{y}{a} + \frac{c}{a} xy - \frac{b}{a} x = 1$. Здѣсь y соотвѣтствуетъ вышеуказанному v, xy соотвѣтствуетъ w и x соотвѣтствуетъ z.

Если (2) имѣетъ мѣсто, и если v, w и z нанесены, какъ три координаты въ пространствѣ, то всѣ эти точки должны лежать въ одной плоскости. Это можетъ быть непосредственно провѣрено при помощи трехъ сторонъ деревяннаго ящика и нѣсколькихъ шариковъ, надѣтыхъ на концы заостренныхъ проволокъ; чтобы опредѣлить эту плоскость, можно погрузить ящикъ въ резервуаръ съ водой и посмотрѣть, лежатъ ли всѣ шарики въ плоскости поверхности воды.

---

*) Здѣсь нѣтъ извѣстнаго физическаго основанія ожидать существованія подобнаго соотношенія. Сначала я думалъ, что, можетъ быть, случайно большинство вычерченныхъ кривыхъ оказались похожими на гиперболы и должны потому приблизительно слѣдовать закону $yx^n = C$, но я нашелъ потомъ, что это далеко не былъ случай. Слѣдующій фактъ заслуживаетъ вниманія. Когда мои студенты, провѣряя вышеприведенное правило, находили, что точки, соотвѣтствовавшія ихъ log p и log v, не лежатъ на прямой линіи, я находилъ, что они сдѣлали ошибку въ подсчетѣ внутренняго объема. Слишкомъ большой или слишкомъ малый объемъ даютъ въ результатѣ уклоненіе въ ту или другую сторону отъ прямой. Если только имѣется такая эмпирическая формула, то во многихъ вычисленіяхъ удобно ею пользоваться. Если же ея не имѣется, то приходится руководствоваться правилами, данными для проведенія касательныхъ къ кривой. Бываетъ очень интересно заставить нѣсколькихъ студентовъ прочертить одну и ту же кривую, намѣтивъ на ней двѣ точки, и предложить имъ всѣмъ независимо другъ отъ друга провести къ ихъ кривымъ въ этихъ точкахъ касательныя и измѣрить уголъ между ними. Удивительно бываетъ видѣть, насколько отличаются другъ отъ друга полученные ими линіи и углы. Предложите имъ всѣмъ приблизительно измѣрить радіусъ кривизны кривой въ какой либо точкѣ; въ этомъ случаѣ разница получится еще большая, чѣмъ раньше.

Я пользовался также и методомъ начертательной геометріи для опредѣленія плоскости, но нѣтъ ни одного метода, не исключая и примѣненнаго мною, который бы могъ сравниться по простотѣ съ предыдущимъ методомъ натянутой нити.

Не можетъ быть дано строгихъ правилъ для провѣрки всевозможныхъ эмпирическикъ формулъ, составленныхъ по наблюденнымъ числамъ. Студентъ долженъ помнить, что его формула эмпирическая, и онъ не долженъ поступать съ ней, какъ будто бы онъ открылъ естественный законъ необыкновенной точности.

Если другія формулы оказываются несостоятельными, мы пробуемъ

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{и т. д.},$$

такъ какъ мы знаемъ, что при достаточныхъ предѣлахъ эта формула будетъ удовлетворять любой кривой. Если имѣется болѣе двухъ постоянныхъ, мы ихъ въ большинствѣ случаевъ опредѣляемъ помощью кропотливаго, такъ называемаго, метода наименьшихъ квадратовъ. Чтобы узнать, слѣдуютъ ли давленіе и температура насыщеннаго пара закону $p = a\,(\theta + \beta)^n \ldots$ (3), гдѣ θ, положимъ, температура по Цельсію, нужно опредѣлить три постоянныя. Единственный вполнѣ успѣшный способъ, испытанный мною, состоитъ въ угадываніи β. Я знаю, что β—близка къ 40^0. Я прошу одного студента попробовать $\beta = 40$, другого $\beta = 41^0$, третьяго $\beta = 39^0$ и т. д.; отъ нихъ требуется найти соотношеніе (3), которое самымъ точнымъ образомъ представитъ зависимость между p и θ, положимъ, между предѣлами $p = 7$ фун. на кв. дм. и $p = 150$. Тотъ, кто получитъ прямую линію, наиболѣе точно проходящую между точками, когда $\log p$ и $\log(\theta + \beta)$ приняты за координаты ихъ, имѣетъ самое близкое къ истинному значеніе β. Изобрѣтательные студенты могутъ усовершенствовать этотъ способъ. (См. конецъ I главы).

15. Считаемъ своимъ долгомъ напомнить, что, если $y = a + bx$, то $\dfrac{dy}{dx} = b$ и, если $\dfrac{dy}{dx} = b$, то $y = A + bx$, гдѣ A — нѣкоторая постоянная.

Докажемъ это алгебраически.

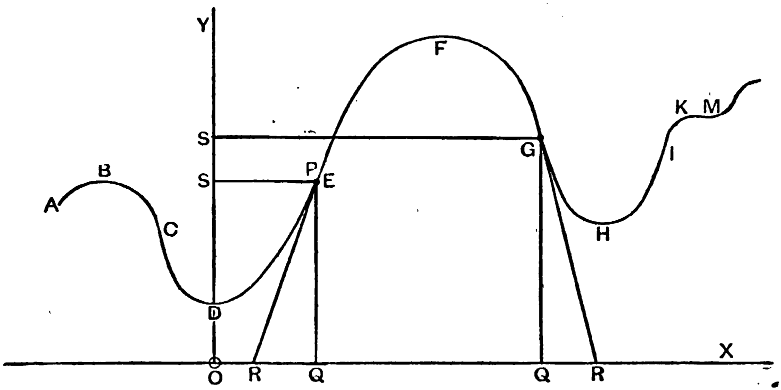
Пусть $y = a + bx$. Возьмемъ нѣкоторое частное значеніе для x и вычислимъ y. Затѣмъ беремъ новое значеніе для x, называемъ его $x + \delta x$ и вычисляемъ новое y, — назовемъ его $y + \delta y$.

$$y + \delta y = a + b(x + \delta x),$$

вычтя $y = a + bx$, находимъ

$$\delta y = b\delta x \quad \text{или} \quad \frac{\delta y}{\delta x} = b$$

и, такъ какъ, какъ бы малы ни были δx и δy, ихъ отношеніе $=b$, то мы можемъ сказать, что и $\frac{dy}{dx}=b$.



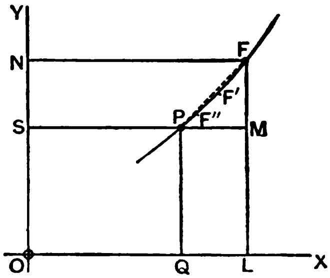
Черт. 6.

16. На кривой черт. 6 есть **положительный уклонъ** (*y возрастастъ* съ увеличеніемъ x) въ частяхъ AB, DF и HJ и **отрицательный уклонъ** (*y уменьшается* по мѣрѣ увеличенія x) въ частяхъ BD и FH. Уклонъ равенъ нулю въ B и F, которыя называются точками **максимума** или точками, гдѣ y maximum, а также равенъ O въ точкахъ D и H, которыя суть точки **минимума**. Точка E есть одна изъ тѣхъ, въ которыхъ уклонъ перестаетъ возрастать и ннчинаетъ уменьшаться: это—точка **перегиба.**

Замѣтимъ, что, если мы желаемъ узнать уклонъ въ точкѣ P, мы сначала избираемъ точку F, близкую къ P. (Представьте себѣ, что на черт. 6 небольшая часть кривой увеличена въ тысячу разъ). Назовемъ $PS=x$, $PQ=y$, $NF=$ $=x+\delta x$, $FL=y+\delta y$, такъ что $PM=\delta x$, $FM=\delta y$. Теперь $FM:PM$ или $\frac{\delta y}{\delta x}$ есть *среднiй* уклонъ между P и F. Онъ равенъ $tg\ FPM$.

Представимъ себѣ тотъ же чертежъ, но съ точкой F'', болѣе близкой къ P. Замѣтимъ, что прямая линія FP или $F'P$ или $F''P$ все болѣе и болѣе приближается къ тому,

что мы называемъ касательной къ кривой въ точкѣ P. Во всѣхъ случаяхъ $\frac{\delta y}{\delta x}$ есть tg угла, который линія FP или $F'P$ или $F''P$ составляетъ съ горизонтальной линіей, такъ что мы видимъ, что въ *предѣлѣ* уклонъ линіи или $\frac{dy}{dx}$ въ точкѣ P есть тангенсъ угла, который составляетъ касательная въ P съ осью X-овъ. Положимъ далѣе, что вмѣсто грубаго сужденія на глазъ, какъ мы это сдѣлали прежде при разсмотрѣніи черт. 6, мы желаемъ измѣрить весьма тщательно уклонъ въ нѣкоторой точкѣ P; замѣтимъ, что *уклонъ* не зависитъ отъ того, гдѣ находится ось X-овъ, лишь бы она была горизонтальна, и я, примѣняя данное здѣсь правило, провожу OX *ниже* той части кривой, въ которой занимаюсь опредѣленіемъ уклона. Проводимъ касательную



Черт. 7.

PR къ кривой, пересѣкающую OX въ R. Итакъ уклонъ представляетъ собой $tg\ PRX$. Если чертежъ и обозначенія сдѣланы по моимъ указаніямъ, то мы замѣтимъ, что PRX всегда острый уголъ, когда уклонъ положительный и всегда тупой, когда уклонъ отрицателенъ. Не слѣдуетъ забывать, что подъ уклономъ кривой въ нѣкоторой точкѣ подразумѣвается величина приращенія y относительно x, и что мы можемъ назвать его или *уклономъ* кривой, или $tg\ PRQ$, или символомъ $\frac{dy}{dx}$ или «**производной отъ у по х**», и подъ всѣми этими названіями подразумѣвается одна и та же вещь.

Всякій знаетъ, что подразумѣваютъ, когда, идя въ гору, говорятъ, что **уклонъ** мѣняется, уклонъ уменьшается, уклонъ возрастаетъ, и въ этомъ понятіи уже заключается основная идея анализа.

17. Мы всѣ знаемъ, что подразумѣвается, когда въ желѣзнодорожномъ поѣздѣ мы говоримъ, что **«ѣдемъ со скоростью 30 миль въ часъ»**. Развѣ вы думаете при этомъ, что мы въ послѣдній часъ проѣхали 30 миль, или что въ слѣдующій часъ дѣйствительно проѣдемъ 30 миль? Конечно нѣтъ. Мы можетъ быть только 10 минутъ тому назадъ выѣхали съ конечной станціи; въ слѣдующую секунду можетъ произойти крушеніе поѣзда. То, что мы подразумѣваемъ, это просто то, что послѣднее разстояніе въ 3 мили было пройдено въ $^1/_{10}$ часа, или скорѣе, что послѣднее разстояніе въ 0·0003 мили было пройдено въ 0·00001 часа. И это не вполнѣ точно; по мѣрѣ того, какъ мы беремъ разстоянія все короче и короче и дѣлимъ ихъ на промежутки времени, въ теченіи которыхъ они пройдены, мы все болѣе приближаемся къ истинной величинѣ скорости. Нижеслѣдующая таблица показываетъ, какія разстоянія проходитъ свободно падающее тѣло въ Лондонѣ въ промежутки времени, слѣдующіе послѣ двухъ секундъ, прошедшихъ отъ начала паденія. То есть, тутъ даны разстоянія, пройденныя въ промежутокъ времени между 2 секундами, считая отъ начала паденія, и 2·1 или 2·01 или 2·001 сек. Каждое изъ этихъ разстояній, раздѣленное на промежутокъ времени, дастъ среднюю скорость въ этотъ промежутокъ времени.

Промежутокъ времени въ сек.	0·1	0·01	0·001
Разстояніе въ футахъ, проходимое падающимъ тѣломъ	6·601	0·6456	0·064416
Среднія скорости	66·01	64·56	64·416

Мы видимъ, что по мѣрѣ того, какъ мы промежутокъ времени послѣ двухъ секундъ беремъ все меньше и меньше, средняя скорость въ этотъ промежутокъ времени приближается все болѣе и болѣе къ истинной величинѣ скорости въ моментъ соотвѣтствующій 2 секундамъ отъ начала паденія, которая точно равна 64·4 фута въ секунду. Мы можемъ найти истинную скорость въ нѣкоторый моментъ времени, когда мы знаемъ законъ, связывающій s и t, какъ видно изъ слѣдующаго.

Пусть $s = 16{\cdot}1t^2$, хорошо извѣстный законъ для тѣлъ свободно падающихъ въ Лондонѣ. Если t дано, то мы мо-

жемъ вычислить s. Если t даемъ нѣсколько большую величину, которую назовемъ $t+\delta t$ (здѣсь δt—есть символъ для обозначенія весьма малой части времени; это не $\delta \times t$, но совершенно другая вещь); и, если мы назовемъ соотвѣтствующее разстояніе $s+\delta s$, тогда $s+\delta s = 16\cdot 1 \ (t+\delta t)^2$ или $16\cdot 1 \left\{ t^2 + 2t.\delta t + (\delta t)^2 \right\}$. Отсюда по вычитаніи получимъ $\delta s = 16\cdot 1 \left\{ 2t.\delta t + (\delta t)^2 \right\}$, и эта формула даетъ намъ возможность точно вычислить разстояніе, пройденное въ промежутокъ времени между моментомъ t и моментомъ $t+\delta t$. Средняя скорость въ этотъ промежутокъ времени $=$ $\frac{\delta s}{\delta t}$ или

$$\frac{\delta s}{\delta t} = 32\cdot 2t + 16\cdot 1 \ \delta t.$$

Непремѣнно замѣтьте, что это абсолютно вѣрно. Здѣсь нѣтъ какой нибудь неточности.

Теперь я подхожу къ важной идеѣ; δt дѣлается все меньше и меньше, $\frac{\delta s}{\delta t}$ приближается все болѣе и болѣе къ $32\cdot 2t$, при чемъ другой членъ $16\cdot 1 \ \delta t$ дѣлается все меньше и меньше, и поэтому мы говоримъ, что **въ предѣлѣ** $\frac{\delta s}{\delta t}$ точно равно $32\cdot 2 \ t$.

Предѣльная величина $\frac{\delta s}{\delta t}$, когда δt безконечно убываетъ, называется $\frac{ds}{dt}$, или степенью измѣненія s съ увеличеніемъ t, или производной s по t, или скоростью въ моментъ t.

Теперь вѣроятно не представитъ большой трудности понять идею о предѣльной величинѣ. Нѣкоторые составили себѣ понятіе, что они въ этомъ случаѣ находятъ нѣчто такое, что только приблизительно вѣрно. Это происходитъ часто потому, что ихъ учитель говорилъ имъ такія вещи, какъ «отбросимъ $16\cdot 1\delta t$, такъ какъ оно мало», или «пусть dt будетъ нѣкоторый безконечно малый промежутокъ времени» и они продолжаютъ себѣ дѣлить на него величины,

показывая этимъ, что хотя бы они прожили вѣкъ Маѳусаила, они никогда не будутъ имѣть здраваго смысла инженера.

Въ другого рода смущеніе могутъ привести тѣ, кто говоритъ: «пусть $\delta t = 0$, тогда $\frac{\delta s}{\delta t}$ или $\frac{ds}{dt}$ такія то и такія то». Правильное опредѣленіе таково: «по мѣрѣ того, какъ δt безконечно убываетъ, $\frac{\delta s}{\delta t}$ приближается все болѣе и болѣе къ конечной величинѣ $32{\cdot}2\,t$»; какъ я уже говорилъ, всякому на каждомъ шагу приходится сталкиваться съ понятіемъ о предѣлѣ.

Если мы изъ закона, связывающаго s и t, находимъ $\frac{ds}{dt}$ или скорость, то мы говоримъ, что **дифференцируемъ** s по t. Когда намъ дано $\frac{ds}{dt}$, и мы производимъ дѣйствіе обратное вышеуказанному, то мы говоримъ, что мы **интегрируемъ**.

Еслибы мнѣ пришлось объяснять все это на лекціяхъ, я дольше остановился бы на разъясненіи точнаго понятія о вышеуказанной величинѣ и помощью нѣсколькихъ иллюстрацій пояснилъ бы ея значеніе. Но то, что кажется не совсѣмъ яснымъ въ книгѣ, и на лекціи требуетъ нѣкотораго напряженія. Поэтому по необходимости я долженъ ограничиться только заявленіемъ, что мои читатели и сами могутъ прекрасно пояснить себѣ эту идею, если только они немножко подумаютъ надъ ней. При томъ мое главное намѣреніе заключается въ томъ, чтобы пріучить ихъ менѣе бояться пользоваться символами подобными dy/dx и $\int y\,.\,dx$.

18. Для нѣкотораго движенія даны s и t въ видѣ ряда чиселъ. Какъ намъ изучить это движеніе? Напримѣръ, возьмемъ росписаніе хода поѣзда на Бредшаусской желѣзной дорогѣ, которое заключаетъ въ себѣ не только станціи, но и нѣсколько сотъ пунктовъ между Euston и Rugby. Выберемъ слѣдующія единицы для измѣренія величинъ: s пусть будетъ въ миляхъ, t въ часахъ и въ минутахъ. $s = 0$, должно соотвѣтствовать Euston'у.

s	t
0	10 часовъ
3	10..10
5	10..15
7	10..20
7	10..23
9	10..28
12	10..33
	и т. д.

Одинъ способъ заключается въ слѣдующемъ: наносимъ времена t (беремъ промежутки времени послѣ 10 часовъ) по горизонтальному направленію и s по вертикальному на листѣ клѣтчатки и проведемъ кривую черезъ эти точки.

Уклонъ этой кривой въ нѣкоторомъ мѣстѣ ея представляетъ скорость поѣзда въ масштабѣ, который будетъ зависѣть отъ масштабовъ выбранныхъ для s и t. Замѣчаемъ мѣста, гдѣ скорость велика или мала. Мы видимъ, что между $t = 10.20$ и $t = 10.23$ скорость равна 0. Вѣроятно поѣздъ былъ совершенно остановленъ. Чтобы быть абсолютно точнымъ, необходимо слѣдовало бы дать s для всѣхъ величинъ t, а не для нѣкоторыхъ только. Но я не хочу этимъ сказать, что таблица во многихъ важныхъ примѣненіяхъ менѣе полезна, чѣмъ кривая.

Если бы поѣздъ въ нѣкоторомъ пунктѣ остановили и направили назадъ по направленію къ Euston'у, то мы получили бы отрицательный уклонъ на нашей кривой и отрицательную скорость.

Замѣтимъ, что **ускореніе** будучи величиной измѣненія скорости съ теченіемъ времени, выражается величиной измѣненія уклона кривой. Почему бы не начертить на томъ же листѣ бумаги кривую, которая показывала бы для всякаго момента **скорости** поѣзда. Уклонъ этой новой кривой долженъ, очевидно, представлять собой ускореніе. Мнѣ доставляетъ удовольствіе мысль, что еще никто не далъ названія величинѣ измѣненія ускоренія.

Символы, употребляемые на практикѣ, слѣдующіе:

s и t для пространства и времени;

скорость v или $\frac{ds}{dt}$ или по Ньютонову обозначенію $\dot{s}$;

ускореніе $\frac{dv}{dt}$ или $\frac{d^2s}{dt^2}$ или по Ньютонову обозначенію $\ddot{s}$,

величина измѣненія ускоренія должна быть $\frac{d^3s}{dt^3}$.

Замѣтимъ, что $\frac{d^2s}{dt^2}$ есть только символъ; онъ не имѣетъ ничего общаго съ алгебраическимъ выраженіемъ $\frac{d^2 \times s}{d \times t^2}$. Символъ этотъ просто взятъ для того, чтобы показать, что мы дифференцируемъ s дважды по t.

Я уже указалъ на то, что уклонъ кривой можетъ быть найденъ построеніемъ касательной къ кривой, подобнымъ же образомъ легко найти и ускореніе изъ кривой скорости.

19. Другой путь, лучшій, чѣмъ способъ проведенія касательной, поясняется слѣдующей таблицей.

t секундъ	s футъ	v футъ въ секунду или ds/dt	ускореніе въ футахъ въ секунду^2 или dv/dt
0·06	0·0880		
		14·74	
0·07	0·2354		—125
		13·49	
0·08	0·3703		— 127
		12·22	
0·09	0·4925		—127
		10·95	
0·10	0·6020		—129
		9·66	
0·11	0·6986		—131
		8·35	
0·12	0·7821		—131
		7·04	
0·13	0·8525		

Въ новомъ механизмѣ было необходимо для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ цѣлей знать, каково ускореніе точки A во всякомъ ея положеніи, и, чтобы сдѣлать это, я находилъ сначала ея скорость. Былъ устроенъ записывающій приборъ, и положенія точки A отмѣчались въ промежутки времени t, считая отъ момента принятаго за нуль. Въ таблицѣ я даю для каждаго момента разстояніе A отъ опредѣленной точки и называю его s. Если бы я далъ таблицу для всѣхъ положеній точки A до тѣхъ поръ, пока она не возвратится въ свое первоначальное положеніе, то это было бы еще болѣе поучительно, но всякій студентъ можетъ самъ составить такую таблицу для какого нибудь отдѣльнаго механизма. Пусть, напримѣръ, s будетъ разстояніе поршня отъ конца его хода. Конечно, хорошо подготовленный въ математическомъ отношеніи инженеръ не станетъ надъ этимъ трудиться. Онъ знаетъ графическій способъ для полученія этого результата въ случаѣ поршня паровой машины. Да, но знаетъ ли онъ такое правило для всякаго возможнаго механизма? Стоитъ ли труда пытаться найти такое графическое правило для всякаго механизма? Здѣсь предлагается правильный вполнѣ согласный съ здравымъ смысломъ путь къ опредѣленію величины ускоренія въ любой точкѣ механизма, и, если бы даже онъ не былъ испробованъ еще никѣмъ, кромѣ меня и моихъ учениковъ, то и тогда я беру на себя смѣлость думать, что онъ заслужитъ похвалу людей практичныхъ. Для новичковъ же онъ неоцѣнимъ.

Теперь, положимъ, что масса тѣла, центръ которой движется такъ, какъ точка A, будетъ m **(вѣсъ тѣла въ фунтахъ въ Лондонѣ, раздѣленный на 32·2)** *). Умножая ускореніе въ футахъ въ секунду ^{2}, которое вы находите, на m, вы получите силу, которая дѣйствуетъ на тѣло, *увеличивая* его скорость. Сила будетъ выражена въ фунтахъ.

---

*) Я часто излагалъ свои доводы въ пользу употребленія въ книгахъ, предназначенныхъ для инженеровъ, единицъ силы, принятыхъ ими на практикѣ. Я самъ впродолженіи 20 лѣтъ пользовался со студентами этой системой (она представляетъ собой, собственно говоря, такую же *абсолютную* систему, какъ и система *C.G.S.* или помѣщаемая во многихъ учебникахъ «poundal» система), и вотъ почему ихъ знаніе механики не есть простое книжное знаніе, состав-

20. Мы разсмотрѣли случай паденія тѣль, въ которомъ пространство и время связаны закономъ $s = {}^1/_2 gt^2$, гдѣ g ускореніе силы тяжести равное 32·2 фута въ секунду ^{2} въ Лондонѣ. Но и многія другія пары величинъ связаны подобными же законами и я представлю ихъ вообще въ видѣ.

$$y = ax^2.$$

Пусть частное значеніе a будетъ, положимъ, $a = {}^1/_{30}$.

Теперь, возьмемъ $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и въ каждомъ случаѣ вычислимъ y.

Нанесемъ соотвѣтствующія точки на клѣтчаткѣ.

Онѣ ложатся на параболической кривой. Находимъ уклонъ кривой (я называю его $\frac{dy}{dx}$ (въ нѣкоторой точкѣ) ея, для которой, положимъ, $x = 3$; сдѣлаемъ то же самое для $x = 4$, $x =$ и т. д. Начертимъ новую кривую съ тѣми же величинами x, но съ $\frac{dy}{dx}$, какъ ординатами. При одномъ

ляющее нѣчто отдѣльное отъ ихъ практическихъ занятій, но оно даетъ имъ содержаніе и форму такъ же, какъ рука даетъ форму перчаткѣ. Съ одинаковымъ успѣхомъ можно начать разговаривать въ мастерскихъ на папуасскомъ языкѣ или заговорить о системѣ, которую нѣкоторые называютъ англійской, какъ будто непремѣнно должна быть англійской та система, въ которой говорится о столькихъ то «poundals» силы, или о столькихъ то «poundals-футахъ» работы. И, однако, тѣ же философы удивляются, что инженеры практики питаютъ презрѣніе къ книжной *теоріи*. Я беру на себя смѣлость заявить, что въ нашей странѣ не найдется ни одного инженера практика, который бы соображалъ по этой системѣ «poundals», хотя всѣ книжки уже 30 лѣтъ пользуются этими единицами.

Въ практической динамикѣ одна секунда есть единица времени, одинъ футъ—единица пространства, одинъ фунтъ (такое названіе носитъ вѣсъ фунта въ Лондонѣ)—единица силы. Чтобы удовлетворить господъ, подготовляющихъ къ дѣятельности инженеровъ, я долженъ сказать, что «единица массы есть масса, которой сила въ 1 фунтъ сообщаетъ въ 1 секунду ^{2} ускореніе 1 футъ.

Мы не имѣемъ названія для единицы массы, но инженеру никогда и не приходится говорить объ инерціи тѣла самой по себѣ. Его правило таково: «во всѣхъ динамическихъ расчетахъ, дѣля вѣсъ тѣла въ фунтахъ на 32·2, находимъ его массу въ инженерныхъ единицахъ, т. е. въ такихъ, которыя обыкновенно подразумѣваются въ обыденной рѣчи инженеровъ». Если вы пользуетесь другой системой, то каждый полученный вами результатъ приходится умно-

взглядѣ на эту кривую мы видимъ, по величинѣ ея ординатъ, каковъ уклонъ первой кривой. Если вы будете вычерчивать эти кривыя въ краскахъ, то сдѣлайте кривую y черной, а кривую $\frac{dy}{dx}$ красной. Замѣтимъ что уклонъ или $\frac{dy}{dx}$ въ любой точкѣ равенъ $2a$ умноженному на величину x для этой точки.

Мы можемъ сдѣлать этотъ выводъ алгебраически.

Какъ и прежде, для нѣкоторой величины x вычисляемъ y. Теперь возьмемъ большую величину x, которую назовемъ $x+\delta x$, и вычислимъ новое y, которое назовемъ $y+\delta y$. Имѣемъ тогда.

$$y+\delta y=a\ (x+\delta x)^2=$$

$$=a\ \left\{ x^2+2x.\delta x+(\delta x)^2 \right\},$$

послѣ вычитанія получимъ

$$\delta y=a\ \left\{ 2x\,\delta x+(\delta x)^2 \right\},$$

жать или дѣлить на нѣкоторое количество, чтобы перевести его на обычный языкъ.

Сила въ фунтахъ получаетъ оцѣнку въ *пространствѣ*, когда дана работа въ футофунтахъ, или во *времени*, когда производится или теряется количество движенія.

Примѣръ 1. Головка молота въ $2^1/_2$ фунта, двигающаяся со скоростью 40 футъ въ секунду, остановлена въ 0·001 секунду. Какая средняя сила удара? Въ данномъ случаѣ масса будетъ $2^1/_2$: 32·2 или 0·0776. Количество движенія 3·104. (Количество движенія равно произведенію массы на скорость). Сила есть количество движенія въ секунду, откуда средняя сила 3·104 : 0·001 или 3104 фунта.

Примѣръ 2. Вода въ струѣ бѣжитъ съ линейной скоростью 20 футъ въ секунду (относительно сосуда, изъ котораго она вытекаетъ) при площади струи въ поперечномъ сѣченіи равной 0·1 кв. фута. Какая сила дѣйствуетъ на сосудъ?

Имѣемъ вѣсъ вытекающей воды въ секунду $20 \times 0{\cdot}1$ куб. ф. или $20 \times 0{\cdot}1 \times 62{\cdot}3$ фунт. или масса въ секунду въ инженерныхъ единицахъ будетъ $20 \times 0{\cdot}1 \times 62{\cdot}3 : 32{\cdot}2$. Эта масса равна 3·87. Ея количество движенія 77·4, а такъ какъ это количество движенія поглощается сосудомъ въ одну секунду, то оно и есть **сила дѣйствующая на сосудъ.**

Студентъ, который хорошенько подумаетъ надъ этимъ, убѣдится, что эта сила будетъ одна и та же, будетъ ли самъ сосудъ находиться въ движеніи или нѣтъ.

дѣля на δx, получаемъ

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2ax + a \,.\, \delta x.$$

Представимъ себѣ, что δx безконечно убываетъ и примѣнимъ символъ $\frac{dy}{dx}$ для обозначенія предѣла величины $\frac{\delta y}{\delta x}$, тогда получимъ $\frac{dy}{dx} = 2ax$, результатъ, уже полученный нами на клѣтчаткѣ *).

21. Замѣтимъ, что, когда мы повторимъ процессъ дифференцированія, то мы получимъ въ результатѣ $\frac{d^2y}{dx^2}$, и отвѣтъ будетъ $2a$. Вы должны коротко познакомиться съ этими символами. Если y функція x, то $\frac{dy}{dx}$ есть величина измѣненія y относительно x; $\frac{d^2y}{dx^2}$ есть величина измѣненія $\frac{dy}{dx}$ относительно x.

---

*) *Символически.* Пусть $y = f(x)$... (1), гдѣ $f(x)$ означаетъ нѣкоторое выраженіе, содержащее x. Возьмемъ нѣкоторое значеніе x и вычислимъ y. Теперь возьмемъ x немного бо́льшее, положимъ $x + \delta x$ и вычислимъ новое y, назовемъ его $y + \delta y$, тогда

$$y + \delta y = f(x + \delta x) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (2)$$

Вычитая (1) изъ (2) и дѣля на δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (3)$$

То, что мы подразумѣваемъ подъ $\frac{dy}{dx}$, есть **предѣльная величина выраженія** $\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$ при δx неограниченно убывающемъ. Это есть точное опредѣленіе $\frac{dy}{dx}$. Такое опредѣленіе легко запомнить и написать, и за такой отвѣтъ на экзаменѣ самый малознающій человѣкъ имѣетъ право получить полную отмѣтку. Легко видѣть, что производная $af(x)$ равна a разъ взятой производной $f(x)$, а также, что производная суммы $f(x) + F(x)$ есть сумма производныхъ.

Или, вкратцѣ, $\frac{d^2y}{dx^2}$ есть **производная** отъ $\frac{dy}{dx}$ по x; $\frac{dy}{dx}$ есть производная y по x.

Или такъ: **интегрируемъ** $\frac{d^2y}{dx^2}$ и получимъ $\frac{dy}{dx}$; интегрируемъ $\frac{dy}{dx}$ и получимъ y.

Я надѣюсь, что вы вполнѣ ознакомитесь съ этими символами и понятіями. Я только боюсь, что вы можете забыть о вашемъ знакомствѣ съ ними, когда мы будемъ вмѣсто x и y употреблять другія буквы.

Производная отъ

$$y = a + bx + cx^2,$$

гдѣ a, b и c — постоянныя, будетъ

$$\frac{dy}{dx} = 0 + b + 2cx$$

Интегралъ выраженія $0 + b + 2\,cx$ по x будетъ $A + bx + cx^2$, гдѣ A произвольное постоянное.

Подобнымъ образомъ интегралъ $b + kz$ по z будетъ

$$A + bz + {}^1/_2kz^2.$$

Интегралъ $b + kv$ по v будетъ $A + bv + {}^1/_2kv^2$.

Очень легко доказать, въ видѣ упражненія, что, если $y = ax^3$, то $\frac{dy}{dx} = 3ax^2$, и затѣмъ, что если $y = ax^4$, то $\frac{dy}{dx} = 4ax^3$. Все это частные случаи того закона, что, если $y = ax^n$, то $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$.

При выполненіи этихъ примѣровъ мы полагаемъ, что $\frac{\delta y}{\delta x}$ обращается въ $\frac{dy}{dx}$ или, что δy все болѣе и болѣе приближается къ величинѣ $\delta x. \frac{dy}{dx}$, по мѣрѣ неограниченнаго убыванія δx. Это иногда выражается такъ

$$y + \delta y = y + \delta x \times \frac{dy}{dx} \text{ или}$$

$$f(x + \delta x) = f\,(x) + \delta x \frac{df(x)}{dx} \quad \ldots \ldots . (1).$$

22. Равномѣрно ускоренное движеніе.

Если ускореніе $\frac{d^2s}{dt^2} = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$

то, интегрируя, имѣемъ $\frac{ds}{dt} = b + at =$ скорости v. Замѣтимъ, что мы здѣсь прибавляемъ нѣкоторое постоянное b, такъ какъ, если мы дифференцируемъ постоянное, то получаемъ 0. Здѣсь намъ нужно знать еще нѣкоторое условіе, которое дало бы намъ возможность найти величину постояннаго b. Пусть это условіе будетъ, что $v = v_0$ при $t = 0$. Тогда b, очевидно, равно v_0.

Такимъ образомъ скорость $v = \frac{ds}{dt} = v_0 + at. \ . \ . \ . \ (2).$

Интегрируемъ еще разъ и получаемъ

$$s = c + v_0t + {}^1/_2at^2.$$

Опять мы должны замѣтить, что мы при интегрированіи прибавляемъ нѣкоторое неизвѣстное постоянное. Намъ должно быть дано нѣкоторое условіе для опредѣленія величины постояннаго c. Такъ, если $s = s_0$ при $t = 0$, то это s_0 и есть величина c, и такимъ образомъ мы имѣемъ самое полное выраженіе закона движенія

$$s = s_0 + v_0t + {}^1/_2at^2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Если мы продифференцируемъ выраженіе (3), то получимъ (2), если же продифференцируемъ выраженіе (2), то получимъ (1).

23. Мы видимъ, что, **коль скоро студентъ умѣетъ дифференцировать и интегрировать**, то онъ можетъ рѣшать слѣдующаго рода задачи.

1) Если s дано, какъ нѣкоторая функція времени, то дифференцируемъ ее и найдемъ скорость въ нѣкоторый моментъ; дифференцируемъ снова и найдемъ ускореніе.

2) Если ускореніе дано, какъ нѣкоторая функція времени, то интегрируемъ ее и найдемъ скорость; интегрируемъ снова и получимъ пройденное пространство.

Замѣтимъ, что s можетъ быть не разстояніемъ, а пройденнымъ угломъ, когда движеніе угловое или вращательное. Лучше его назовемъ въ этомъ случаѣ θ. Тогда θ' или

$\frac{d\theta}{dt}$ будетъ углавая скорость, а θ'' или $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ угловое ускореніе.

24. Примѣры на движеніе съ постояннымъ ускореніемъ.

1) Ускореніе силы тяжести направлено *сверху внизъ* и обозначается обыкновенно g, при чемъ $g = 32{\cdot}2$ фута въ сек.^{2} въ Лондонѣ. Положимъ, что тѣло въ моментъ $t = 0$ брошено вертикально вверхъ со скоростью V_0 футъ въ секунду; гдѣ оно находится по прошествіи t секундъ? Если разстояніе s измѣряется *снизу вверхъ*, то ускореніе будетъ $-g$ и $s = V_0 t - {}^1/_2 g t^2$. (Мы предполагаемъ въ этомъ случаѣ, что нѣтъ сопротивленія атмосферы, и что ускореніе равно g, направлено сверху внизъ и постоянно).

Замѣтимъ, что $v = V_0 - gt$ и что $v = 0$, когда $V_0 - gt = 0$ или $t = \frac{V_0}{g}$. Отсюда можемъ найти s. Это даетъ самую высокую точку, до которой можетъ достигнуть тѣло, и время, потраченное на это.

Когда снова $s = 0$? Какова скорость?

2) Тѣлу, взятому въ упражненіи 1-мъ, сообщена кромѣ вертикальной скорости еще горизонтальная скорость u_0, которая остается постоянной. Пусть x—горизонтальное разстояніе тѣла отъ начальнаго положенія въ моментъ времени t, тогда $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{dx}{dt} = u_0$ и $x = u_0 t$. Если мы s обозначимъ черезъ y, то для нѣкотораго момента t получимъ

$$y = V_0 t - {}^1/_2 g t^2,$$

$$x = u_0 t,$$

исключая t, находимъ $y = \frac{V_0}{u_0} x - {}^1/_2 g \frac{x^2}{u_0{}^2}$, что есть уравненіе параболы.

3) Если тѣло имѣетъ скорость, направленную подъ угломъ α къ горизонту, то мы можемъ въ вышеприведенныхъ выраженіяхъ подставить вмѣсто V_0 и u_0, $V \sin \alpha$ и $V \cos \alpha$, и затѣмъ можемъ производить всевозможные полезные расчеты, касающіеся снарядовъ.

Начертите кривую для $V = 1000$ фут. въ сек. и $\alpha = 45^0$

Затѣмъ начертите ее для того же V, но при $\alpha = 60°$, а затѣмъ при $\alpha = 30°$.

25. Кинетическая энергія. Положимъ, для небольшого тѣла массы m, при $t = 0$, $s = 0$, начальная скорость v_0 и дѣйствующая на него сила F вызываетъ ускореніе F/m. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ для любого послѣдующаго момента

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t \ldots (1) \text{ и } s = 0 + v_0 t + {}^1/_2 \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 \ldots (2),$$

причемъ (2) можетъ быть написано въ видѣ $s = {}^1/_2 t \left(2v_0 + \frac{F}{m} t\right)$, и легко видѣть изъ (1), что это выраженіе принимаетъ видъ $s = {}^1/_2 t\,(v_0 + v)$, и что средняя скорость въ любой промежутокъ времени есть полусумма скоростей въ началѣ и концѣ этого промежутка. Работа, произведенная силою F на разстояніи s, будетъ Fs. Вычисляя F изъ (1), получимъ $F = (v - v_0) \frac{m}{t}$ и, умножая на s, находимъ, что работа равна ${}^1/_2 m\,(v^2 - v_0^2)$, что выражаетъ всю работу, затраченную при движеніи тѣла, въ функціи его скорости. Итакъ, затраченная работа заставила возрасти ${}^1/_2 m v_0^2$ до ${}^1/_2 m v^2$; вотъ почему ${}^1/_2 m v^2$ и называется кинетической энергіей тѣла.

Другой способъ. Положимъ, что небольшое тѣло массы m, имѣющее скорость v, въ промежутокъ времени δt проходитъ весьма малое разстояніе δs, при чемъ его скорость увеличивается на δv, и пусть на него дѣйствуетъ сила F. Но $F = m \times$ ускореніе, или $F = m \frac{\delta v}{\delta t}$ и $\delta s = v \,.\, \delta t$, такъ что

$$F \,.\, \delta s = m v \delta t \cdot \frac{\delta v}{\delta t} = m v \delta v = \delta E,$$

если δE изображаетъ приращеніе кинетической энергіи тѣла; $\frac{\delta E}{\delta v} = m \,.\, v$. Но наши уравненія только тогда вполнѣ правильны, когда δs, δv и δt безконечно убываютъ, отсюда $\frac{dE}{dv} = mv$, или словами «производная отъ E по v равна

[illegible], и если мы проинтегрируемъ ее по v, то получимъ $E = \frac{mv^2}{2} + c$, гдѣ c нѣкоторое постоянное. Пусть $E = 0$ [illegible] $v = 0$, такъ что $c = 0$, тогда мы имѣемъ $E = \frac{1}{2}mv^2$.

Въ этомъ случаѣ примѣнено дифференцированіе и интегрированіе съ новыми буквами вмѣсто прежнихъ x и y. Здѣсь $\frac{dE}{dv}$ является вмѣсто прежней $\frac{dy}{dx}$. Можетъ быть, если бы вы имѣли выраженіе $\frac{dy}{dx} = mx$, то вамъ скорѣе было бы видно, что $y = \frac{1}{2}mx^2 + c$, и вы должны освободиться отъ такой привычки къ x и y.

90. *Упражненіе.* Пусть x — удлиненіе пружины, когда приложена сила F, и пусть $x = \frac{F}{a}$, при чемъ a представляетъ упругость *) пружины. $F.\delta x$ работа, произведенная при удлиненіи пружины на весьма малую величину δx. Пусть F постепенно возрастаетъ отъ 0 до F и удлиненіе отъ 0 до x. Каковъ запасъ энергіи напряженія въ пружинѣ?

Приращеніе энергіи отъ x до $x + \delta x$ есть $\delta E = F.\delta x$, или въ предѣлѣ $\frac{dE}{dx} = F = ax$, откуда $E = \frac{1}{2}ax^2 + c$. Далѣе, если $E = 0$, когда $x = 0$, то и $c = 0$, такъ что запасъ энергіи есть $E = \frac{1}{2}ax^2 = \frac{1}{2}Fx$ [illegible].

[illegible] случай, когда масса M ко- [illegible] пружины; когда она находится [illegible] разстояніи x отъ положенія равновѣсія, потенціальная энергія равна $\frac{1}{2}ax^2$ и кинетическая энергія равна [illegible] полная энергія будетъ $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}ax^2$ . . .

[illegible] когда сила F должна произвести удлиненіе [illegible] x въ пружинѣ, или прогибъ x въ балкѣ, [illegible] $F = ax$, [illegible] то запасъ [illegible] энергіи напряженія или потенціальной равенъ $\frac{1}{2}ax^2$ или $\frac{1}{2}Fx$.

---

*) [illegible] $x = 1$ [illegible] есть [illegible] удлиненіе [illegible]

Подобнымъ же образомъ, если для вращенія на уголъ θ стержня, или пружины, или какого либо другого предмета требуется **моментъ силы** T и если $T = a\theta$, то запасъ энергіи, въ видѣ энергіи напряженія или потенціальной, будетъ $^1/_2 a\theta^2$ или $^1/_2 T\theta$. Если T выражено въ фунтофутахъ, а θ въ радіанахъ, то отвѣтъ получится въ футофунтахъ.

Совершенная работа = сила $\times$ разстояніе или моментъ силы $\times$ уголъ.

27. Если студентъ знаетъ кое что относительно электричества, то пусть онъ переведетъ на обыденный языкъ дополненный законъ Ома

$$V = RC + L \,.\, dC/dt \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Замѣтимъ, что, если R (омы) и L (генри) остаются постоянными, если C и $\frac{dC}{dt}$ намъ извѣстны, то мы знаемъ V, а если извѣстенъ законъ V, перемѣнной электродвижущей силы, то легко видѣть, что должны быть нѣкоторые способы нахожденія C перемѣнной силы тока. Смотрите на L, какъ на обратную электродвижущую силу въ вольтахъ, когда сила тока возрастаетъ по 1 амперу въ секунду.

Если сила тока въ первичной обмоткѣ **трансформатора**, а слѣдовательно и индукція въ желѣзѣ, не измѣняются, то во вторичной обмоткѣ не будетъ электродвижущей силы. Дѣйствительно, электродвижущая сила во вторичной обмоткѣ въ каждый моментъ равна числу оборотовъ вторичной обмотки, умноженному на величину измѣненія въ секунду индукціи. Величину приращенія I въ секунду мы назовемъ производною отъ I по времени. Хотя L можетъ быть постоянной только при отсутствіи желѣза, или если индукція очень мала, и точная формула будетъ $V = RC + N\frac{dI}{dt} \ldots (2)$, однако легко убѣдиться, что, на практикѣ, (1) съ постояннымъ L почти во всѣхъ случаяхъ можетъ быть примѣняемо (см. пунк. 183).

28. Если $y = ax^n$, и вы желаете найти $\frac{dy}{dx}$, то мнѣ по-

Итакъ производная отъ x^6 есть $6x^5$, отъ $x^{2^1/_2}$ есть $2^1/_2 x^{1^1/_2}$, отъ $x^{-^3/_2}$ есть—$^3/_2 x^{-^5/_2}$.

Когда мы находимъ производную отъ нѣкоторой данной функціи, мы говоримъ, что *дифференцируемъ* ее. Когда дана $\frac{dy}{dx}$, и нужно найти y, мы говоримъ, что *интегрируемъ*. Нѣтъ необходимости разсуждать о происхожденіи словъ *дифференціалъ* и *интегралъ*. Они — техническіе термины.

Дифференцируемъ ax^n и находимъ nax^{n-1}.

Интегрируемъ nax^{n-1} и находимъ $ax^n + c$. При интегрированіи мы всегда прибавляемъ постоянное.

Иногда мы пишемъ такъ, $\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$

$$\int nax^{n-1} \,.\, dx = ax^n.$$

Замѣтимъ, что мы пишемъ $\int$ *впереди* и dx *позади* функціи, когда мы хотимъ сказать, что ее слѣдуетъ интегрировать относительно x. Оба эти символа необходимы. Пока вамъ незачѣмъ ломать голову надъ тѣмъ, почему употребляются тѣ или другіе символы *).

---

*) Когда приходится складывать вмѣстѣ большое число величинъ, какъ напримѣръ, когда приказчикъ подсчитываетъ вѣсъ каждаго небольшого куска отливки и складываетъ ихъ всѣ вмѣстѣ, то, если буква w обозначаетъ вообще какой либо изъ отдѣльныхъ вѣсовъ, мы часто пользуемся символомъ Σw, чтобы выразить сумму ихъ всѣхъ. Когда мы обозначаемъ сумму безконечнаго числа малыхъ величинъ, то замѣняемъ греческую букву s или Σ длинной англійской s или $\int$. Дѣйствительно, можно убѣдиться, что интегрированіе можно разсматривать, какъ нахожденіе суммы подобнаго рода. Итакъ пусть y—ордината кривой; элементъ площади есть $y \,.\, \delta x$, и $\int y.dx$ изображаетъ сумму всѣхъ такихъ элементовъ, или полную площадь. Подобнымъ образомъ, если δm изображаетъ весьма малую часть массы тѣла, и r ея разстояніе отъ оси, тогда $r^2 \,.\, \delta m$ называется моментомъ инерціи δm относительно этой оси, и $\Sigma r^2 \,.\, \delta m$ или $\int r^2 \,.\, dm$ изображаетъ моментъ инерціи всего тѣла относительно оси

Вы сейчасъ же найдете, что не трудно научиться дифференцировать какую-нибудь извѣстную математическую функцію. Вы легко изучите этотъ процессъ, но *интегрированіе* есть процессъ угадыванія, и, какъ бы много практики вы не имѣли, только одинъ навыкъ и смѣтливость могутъ руководить вами въ этомъ процессѣ угадыванія. Для нагляднаго сравненія можно сказать, что, если дифференцированіе подобно умноженію, или возведенію въ 5-ую степень, то интегрированіе подобно дѣленію, или извлеченію корня 5-ой степени. Къ счастью инженеру приходится имѣть дѣло съ очень немногими интегралами, да и тѣ хорошо извѣстны. Ради удобства, онъ можетъ имѣть при себѣ для справокъ достаточно полный списокъ ихъ съ рѣшеніями; хотя лучше было бы, если бы онъ поучился ихъ самъ выводить.

Рѣдко, конечно, приходится интегрировать nax^{n-1}. Это выраженіе уже слишкомъ было бы удобно для интегрированія. Обыкновенно приходится интегрировать bx^m . . .(1). Я знаю, что отвѣтъ есть $\frac{bx^{m+1}}{m+1}$. . . (2). Но какъ доказать это. Дифференцируемъ (2) и получимъ (1), а потому я знаю, что (2) есть интегралъ (1). Я долженъ только прибавить во (2) какое-нибудь постоянное, такъ называемое произвольное постоянное, такъ какъ производная постояннаго 0. Студенты должны продѣлать нѣсколько примѣровъ; интегрировать, положимъ, x^7, bx^4, $bx^{1/2}$, $ax^{-1/2}$, $cx^{3/2}$, $ax^{1/3}$. Когда мы имѣемъ рядъ производныхъ отъ различныхъ выраженій, то неблагоразумно пользоваться имъ въ обратномъ смыслѣ, т. е. смотрѣть на нихъ, какъ на рядъ интеграловъ, такъ какъ рѣдко встрѣчаются на практикѣ выраженія, такъ удобно составленныя.

Напримѣръ $\int 4x^3 \,.\, dx = x^4$, но очень рѣдко приходится интегрировать $4x^3$, а скорѣе $3x^3$, или $5x^3$.

Мы имѣемъ теперь рядъ интересныхъ результатовъ, но

Или, если δV есть элементъ объема, и m его масса на единицу объема, тогда $\int r^2 m \,.\, dV$ есть моментъ инерціи тѣла.

все это частные случаи одного общаго. Дѣйствительно, выраженія

$$y = x^3,\ y = x^2,\ y = x^1,\ y = x^0\ ^{*})$$

суть только частные случаи общаго выраженія $y = x^n$, и студенту полезно разсмотрѣть ихъ, какъ примѣры. Итакъ

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Если $n = 1$, то производная обращается въ $1 . x^0$, или 1. Если $n = 0$, то она обращается въ $0 . x^{-1}$, или 0. Но мы, впрочемъ, уже и раньше знали, что производная отъ постоянной величины равна 0. Мы знаемъ, что если

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \ldots + gx^n, \text{ то}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + b + 2cx + 3ex^2 + \ldots + ngx^{n-1},$$

и при такомъ уровнѣ знаній мы можемъ уже рѣшать добрую половину считающихся трудными задачъ, которыя встрѣчаются въ инженерной практикѣ.

Итакъ намъ слѣдуетъ запомнить слѣдующихъ два вывода: если $y = ax^n$, то $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$, и если $\frac{dy}{dx} = bx^m$, то $y = \frac{b}{m+1}x^{m+1} + c$, гдѣ c—произвольное постоянное, или

$$\int bx^m . dx = \frac{b}{m+1}x^{m+1} + c.$$

Я попрошу студентовъ, чтобы они уже сами попробовали себѣ **конкретно выяснить смыслъ** того, что, если $y = x^n$, то, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$. Я не привожу здѣсь самъ подобныхъ поясненій, такъ какъ онѣ мнѣ понравились, можетъ быть, по-

*) Я предполагаю, что студентъ знаетъ, что любая величина въ степени 0 равна 1. Поучительно вычислить при помощи логариѳмовъ корень высокой степени изъ какого либо числа, чтобы увидѣть, насколько результатъ будетъ отличаться отъ 1. Извлеченіе корня высокой степени есть тоже, что возведеніе въ малую степень, и чѣмъ выше показатель корня, тѣмъ болѣе показатель степени приближается къ 0.

тому, что я самъ ихъ придумалъ, но я сдѣлаю маленькій намекъ.

Возьмемъ $y = x^5$. Пусть $x = 1{\cdot}02$. Вычислимъ y при помощи логариѳмовъ. Теперь пусть $x = 1{\cdot}03$; вычислимъ опять y. Дѣлимъ затѣмъ приращеніе y на $0{\cdot}01$ — приращеніе x.

Пусть второе значеніе x будетъ $1{\cdot}021$, и повторяемъ вышеуказанный процессъ.

Пусть далѣе второе значеніе x будетъ $1{\cdot}0201$ и повторяемъ тотъ же процессъ.

Мы найдемъ, что $\frac{\delta y}{\delta x}$ все болѣе и болѣе приближается къ истинной величинѣ $\frac{dy}{dx}$, которая есть $5 \,.\, (1{\cdot}02)^4$.

Продѣлаемъ то же, когда, напримѣръ, $y = x^{0\cdot 7}$. Студентъ не долженъ думать, что онъ попусту потратитъ время, если онъ будетъ по недѣлямъ дѣлать численные и графическіе примѣры для усвоенія пройденнаго. Пусть онъ на дѣлѣ вполнѣ освоится съ той простой идеей, что, если $y = x^n$, то $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$,

что $$\int ax^s \,.\, dx = \frac{a}{s+1}\, x^{s+1} + \text{постоянное},$$

что $$\int av^s \,.\, dv = \frac{a}{s+1}\, v^{s+1} + \text{постоянное}.$$

Продѣлайте это для $s = 0{\cdot}7$ или $0{\cdot}8$, или $1{\cdot}1$, или -5, или -8, и возьмите другія буквы вмѣсто x и v.

29. Упражненія. Найдите слѣдующіе интегралы. Постоянныя не прибавлены.

$\int x^2 \,.\, dx$ Отв. $^1/_3 x^3$. $\int v^2 \,.\, dv$. Отв. $^1/_3 . v^3$

$\int v^{-s} \,.\, dv$ Отв. $\frac{1}{1-s}\, v^{1-s}$.

$\int \sqrt[3]{v^2} \,.\, dv$ или $\int v^{2/3} \,.\, dv$. Отв. $^3/_5 v^{5/3}$.

$\int t^{-1/2} \,.\, dt$. Отв. $2t^{1/2}$.

$\int \frac{1}{x} dx$ или $\int x^{-1} . dx$. Здѣсь правило не можетъ помочь намъ, такъ какъ мы получаемъ $\frac{x^0}{0} = \infty$, и такъ какъ мы всегда можемъ вычесть безконечно большое постоянное, то нашъ отвѣтъ становится неопредѣленнымъ. Этотъ интегралъ современемъ намъ будетъ нуженъ только въ одномъ случаѣ. Позже мы докажемъ, что

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x, \text{ и } \int \frac{1}{x+a} dx = \log (x+a),$$

и, если $y = \log x$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, и $\int \frac{1}{v} dv = \log v$.

Если $p = av^3$, то $\frac{dp}{bv} =$ за v^2.

Если $v = mt,^{-1/2}$, то $\frac{dv}{dt} = -{}^1/_2 mt^{-3/2}$.

30. Пусть $pv = Rt$, гдѣ R — постоянное. Сдѣлаемъ слѣдующія упражненія. Найти $\frac{dp}{dt}$, если v — постоянное. Отвѣтъ $\frac{R}{v}$.

Найти $\frac{dv}{dt}$, если p—постоянное. Отвѣтъ $\frac{R}{p}$.

Студентъ знаетъ уже, что три перемѣнныя p, v и t суть давленіе, объемъ и абсолютная температура газа. Слишкомъ долго писать, „$\frac{dp}{dt}$, когда v—постоянное". Мы будемъ пользоваться для этого символомъ $\left(\frac{dp}{dt}\right)$, гдѣ скобки обозначаютъ, что перемѣнная, не упомянутая здѣсь, постоянна.

Найти $\left(\frac{dp}{dv}\right)$. Отвѣтъ. Такъ какъ $p = Rtv^{-1}$, то имѣемъ $\left(\frac{dp}{dv}\right) = -Rtv^{-2}$, а по упрощеніи—$pv^{-1}$.

Найти $\left(\frac{dv}{dp}\right)$. Отвѣтъ. Такъ какъ $v = Rtp^{-1}$, то имѣемъ

$\left(\frac{dv}{dp}\right) = -Rtp^{-2}$, а по упрощеніи $-vp^{-1}$.

Найти $\left(\frac{dt}{dp}\right)$. Отвѣтъ. Такъ какъ $t = \frac{v}{R} \cdot p$, то имѣемъ $\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{v}{R}$.

Найдите общее произведеніе второго, пятаго и третьяго изъ вышеприведенныхъ отвѣтовъ и подумайте надъ значеніемъ того факта, что

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dp}\right)\cdot\left(\frac{dp}{dv}\right) = -1.$$

Вообще замѣтимъ, что, если u есть функція двухъ перемѣнныхъ x и y, или, какъ мы говоримъ

$$u = f(x, y),$$

то мы будемъ пользоваться символомъ $\left(\frac{du}{dx}\right)$, чтобы обозначить производную отъ u по x, когда y **принято за постоянное.**

Такія производныя называются **частными производными.**

31. Вотъ прекрасное упражненіе для студентовъ:

Напишемъ нѣкоторую функцію x и y; назовемъ ее u.

Найдемъ $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Теперь дифференцируемъ ее по y, принимая x постояннымъ. Символъ для этого дѣйствія будетъ $\frac{d^2u}{dy \,.\, dx}$.

Всегда вы убѣдитесь, что одинъ и тотъ-же отвѣтъ получится, будете-ли вы дифференцировать въ томъ или другомъ порядкѣ, т. е.

$$\frac{d^2u}{dy \,.\, dx} = \frac{d^2u}{dx \,.\, dy} \quad \dots\dots\dots (3).$$

Дѣйствительно, возьмемъ $u = x^3 + y^3 + ax^2y + bxy^2$,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 3x^2 + 0 + 2axy + by^2.$$

$$\frac{d^2u}{dy\,.\,dx} = 0 + 0 + 2ax + 2by$$

Теперь $$\left(\frac{du}{dy}\right) = 0 + 3y^2 + ax^2 + 2bxy$$

и $$\frac{d^2u}{dx\,.\,dy} = 0 + 0 + 2ax + 2by,$$

то же, что получено выше.

Студентъ не долженъ терять терпѣнія, продѣлывая эти примѣры. Возьмите другія буквы вмѣсто x и y и сдѣлайте нѣсколько примѣровъ. Фактъ, установленный равенствомъ (3), имѣетъ громадное значеніе въ Термодинамикѣ и другихъ приложеніяхъ математики къ инженерному дѣлу. Доказательство этого будетъ дано позднѣе. Студентъ пока долженъ освоиться съ важностью того, что потомъ будетъ доказано.

32. Нужно упомянуть еще о слѣдующемъ. Предположимъ, что намъ дано, что u есть нѣкоторая функція x и y, и что

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = ax^3 + by^3 + cx^2y + gxy^2,$$

Тогда интегралъ ея будетъ

$$u = {}^1/_4ax^4 + by^3x + {}^1/_3cx^3y + {}^1/_2gx^2y^2 + f(y),$$

гдѣ $f(y)$ — нѣкоторая произвольная функція y. Она прибавлена, потому что мы всегда при интегрированіи прибавляемъ постоянное, и, такъ какъ y разсматривалось, какъ постоянное, при нахожденіи $\left(\frac{du}{dx}\right)$, то мы прибавляемъ $f(y)$, которая можетъ содержать y въ различныхъ видахъ, умноженное на постоянныя.

33. Пояснимъ еще недоказанное пока положеніе, что, если $y = \log x$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Студентъ долженъ взять такія величины x, какъ 3,3·001, 3·002, 3·003 и т. д., найти y въ каждомъ случаѣ, раздѣлить приращеніе y на соотвѣтствующее приращеніе x и посмотрѣть, хорошо-ли выполняется наше правило.

Замѣтимъ, что, когда математикъ пишетъ $\log x$, то онъ всегда подразумѣваетъ Неперовъ логариѳмъ x.

34. Примѣръ на $\int \frac{dt}{t} = \log t +$ постоянное.

Въ Термодинамикѣ доказано, что, если въ тепловой машинѣ рабочее вещество получаетъ H единицъ теплоты при температурѣ t, и если t_0—температура холодильника, тогда работа, произведенная совершенной тепловой машиной должна быть

$$H \cdot \frac{t - t_0}{t}, \text{ или } H\left(1 - \frac{t_0}{t}\right).$$

Пусть одинъ фунтъ воды при температурѣ t_0 нагрѣтъ до t_1, и мы предполагаемъ, что количество теплоты, потребное для повышенія его температуры на 1^0, постоянно, положимъ равно 1400 футофунтовъ, какова работа, которую совершенная тепловая машина даетъ взамѣнъ всего затраченнаго количества теплоты? Тепловая энергія должна быть выражена въ футофунтахъ.

Чтобы поднять температуру отъ t до $t + \delta t$, затрачивается количество теплоты $1400\,\delta t$ футофунтовъ. Эта величина соотвѣтствуетъ H въ вышеприведенномъ выраженіи. Отсюда мы имѣемъ эквивалентную этому количеству теплоты работу $\delta W = 1400\,\delta t \left(1 - \frac{t^0}{t}\right)$, или лучше

$$\frac{dW}{dt} = 1400 - 1400\frac{t_0}{t}.$$

Отсюда $W = 1400t - 1400t_0 \log t +$ постоянное.

Далѣе $W = 0$, когда $t = t_0$,

$$0 = 1400t_0 - 1400t_0 \log t_0 + \text{постоянное},$$

отсюда постоянное извѣстно. Пользуясь этой величиной, мы находимъ эквивалентную работу для даннаго количества теплоты въ предѣлахъ отъ t_0 до t_1 равною $1400\,(t_1 - t_0) - 1400t_0 \log \frac{t_1}{t_0}$.

Если, далѣе, фунтъ воды при температурѣ t_1, получаетъ количество теплоты L_1 футофунтовъ (обыкновенно называемое скрытой теплотой) и весь обращается въ паръ при постоянной температурѣ t_1, то работа, которая термодинамически эквивалентна этому количеству теплоты, равна $L_1\left(1 - \frac{t_0}{t_1}\right)$. Итакъ мы видимъ, что работа, которую **совершенная паровая машина** должна развивать, какъ эквивалентъ полученной теплотѣ, затраченной на поднятіе температуры отъ t_0 до t_1 и затѣмъ на ея испареніе равна

$$1400\,(t_1 - t_0) - 1400t_0 \log \frac{t_1}{t_0} + L_1\left(1 - \frac{t_0}{t_1}\right).$$

Упражненіе. Какую работу должна дать совершенная паровая

машина изъ 1 фунта пара при $t_1 = 439$ (или 102 фун. на кв. дм.), или 165° С, если $t_0 = 374°$ или 100° С. Здѣсь $L_1 = 681456$ футофунтовъ.

Находимъ, что работа равна 107990 футофунтовъ на фунтъ пара. Инженеры обыкновенно желаютъ знать, сколько фунтовъ пара выходитъ въ теченіе часа на индикаторную лошадиную силу. w фунтовъ въ часъ даютъ въ минуту $\frac{107990}{60}$ w футофунтовъ. Полагая эту величину, равной 33000, находимъ, что w равно 18·35 фунта пара въ часъ на одну индикаторную лошадиную силу, что можно требовать отъ совершенной паровой машины, работающей между температурами въ 165° С и 100° С.

35 Упражненія. Въ Термодинамикѣ доказано, что, когда ледъ и вода, или вода и паръ находятся вмѣстѣ при одной и той же температурѣ, и s_1 есть объемъ единицы массы вещества въ высшемъ состояніи, а s_0 — объемъ единицы массы вещества въ низшемъ состояніи, то имѣемъ

$$L = t\,(s_1 - s_0)\frac{dp}{dt},$$

гдѣ t есть абсолютная температура, равная $274 + \theta°$ С., L—скрытая теплота единицы массы въ футофунтахъ. Если мы возьмемъ L, какъ скрытую теплоту одного фунта вещества и s_1 и s_0, какъ объемы въ кубическихъ футахъ, то формула будетъ правильною, при чемъ p будетъ выражено въ фунтахъ на квадратный футъ.

I. Въ случаѣ льда—воды $s_0 = 0{\cdot}01747$, $s_1 = 0{\cdot}01602$ при $t = 274^0$ (соотвѣтствуетъ 0° С.), p будетъ 2116 фунтовъ на квадратный футъ и $L = 79 \times 1400$. Отсюда $\frac{dp}{dt} = -278100$.

Итакъ мы видимъ, что температура тающаго льда становится меньше по мѣрѣ возрастанія давленія p, или давленіе понижаетъ точку таянья льда; то есть оно способствуетъ таянью льда. Обратите вниманіе на численное значеніе $\frac{dp}{dt}$. Точка таянія льда понижается на 0·001 градуса при увеличеніи давленія на 278 фунтовъ на квадратный футъ, или приблизительно на 2 фунта на квадр. дюймъ.

II. Вода — паръ. Кажется почти невозможнымъ точно измѣрить опытнымъ путемъ s_1—объемъ въ кубическихъ футахъ одного фунта пара при нѣкоторой температурѣ. s_0 для

воды извѣстно. Вычислимъ $s_1 - s_0$ по вышеприведенной формулѣ при нѣсколькихъ температурахъ, имѣющихся въ слѣдующей таблицѣ опытовъ Реньо. Я думаю, что обозначенія ясны сами по себѣ.

$\theta^0 C$	Абсолютная температура.	Давленіе въ фунт. на кв. дюймъ.	p фунт. на кв. футъ.	$\frac{\delta p}{\delta t}$	Принятое $\frac{dp}{dt}$	L въ футофунтахъ.	$s_1 - s_0$
100	374	14·70	2116·4	81·5			
105	379	17·53	2524		87·8	740,710	22·26
110	384	20·80	2994	94			

Здѣсь принято, что величина $\frac{dp}{dt}$ для 105° есть полусумма 81·5 и 94. Болѣе точный способъ нахожденія этой величины заключается въ томъ, что слѣдуетъ нанести на клѣтчаткѣ возможно большое число величинъ $\frac{\delta p}{\delta t}$ и найти $\frac{dp}{dt}$ для 105° C посредствомъ кривой. $s_1 - s_0$ для 105° C $= 740710 : (379 \times 87{\cdot}8) = 22{\cdot}26$. Далѣе, $s^0 = 0{\cdot}016$ для холодной воды, и не стоитъ дѣлать поправки на ея теплоту. Отсюда мы можемъ принять $s_1 = 22{\cdot}28$, что въ настоящемъ случаѣ представитъ достаточно точный отвѣтъ.

Примѣръ. Найти s_1 для 275° F на основаніи слѣдующей таблицы, при чемъ L равно (716201) *.

t^0F.	248°	257°	266°	275°	284°	293°	302°
p	4152	4854	5652	6551	7563	8698	9966

Примѣръ. Формула для давленія пара вида $p = a\theta^b$, гдѣ a и b—извѣстныя числа, и θ—температура, измѣренная отъ нѣкотораго извѣстнаго нуля, считается полезной, хотя и неточной формулой, изображающей результаты опытовъ Реньо. Выведемъ формулу для объема s_1 одного фунта пара. Мы имѣемъ также хорошо извѣстную

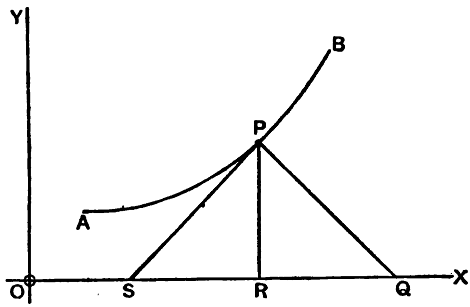
*) Примѣч. перев. Въ текстѣ эта величина почему то пропущена.

формулу для скрытой теплоты $L = c - et$, гдѣ t есть абсолютная температура, а c и e извѣстныя числа. Отсюда, такъ какъ $\frac{dp}{d\vartheta}$ есть тоже самое, что и $\frac{dp}{dt}$, и равно $ba\vartheta^{b-1}$, то $s_1 - s_0 = (c - et) : tba\vartheta^{b-1}$.

Послѣ того, какъ мы подвергали эмпирическую формулу математическимъ преобразованіямъ хорошо провѣрить точность результатовъ на дѣйствительныхъ опытныхъ числахъ, такъ какъ формула изображаетъ дѣйствительность только съ приближеніемъ, и потому небольшія и, повидимому, не имѣющія значенія отклоненія отъ дѣйствительности могутъ послѣ математическихъ дѣйствій сильно возрасти.

36. Изученіе кривыхъ. Когда дано уравненіе новой кривой, то человѣкъ практичный долженъ прежде всего воспользоваться тѣми выгодами, которыя даетъ ему клѣтчатка.

Очень часто для ознакомленія съ кривой большую по-



Черт. 8.

мощь оказываетъ опредѣленіе въ какой либо точкѣ ея $\frac{dy}{dx}$ или ея уклона.

Если мы говоримъ, что x_1 y_1 есть точка на кривой, и насъ просятъ найти уравненіе **касательной** въ этой точкѣ, то намъ нужно только найти уравненіе прямой линіи, которая имѣла бы такой же уклонъ, какъ и кривая въ этой точкѣ, и проходила бы черезъ данную точку x_1 y_1. **Нормаль** есть прямая линія, проходящая черезъ точку x_1 y_1, уклонъ которой равенъ обратной величинѣ уклона кривой въ этой точкѣ со знакомъ минусъ. См. п. 13.

P (черт. 8) есть точка на кривой APB, въ которой

проведены касательная PS и нормаль PQ. OX и OY оси. $OR = x$, $RP = y$, $tg\ PSR = \frac{dy}{dx}$; разстояніе SR называется **подкасательной**, и можно доказать, что оно равно $y : \frac{dy}{dx}$, разстояніе RQ называется **поднормалью** и оно очевидно равно $y\frac{dy}{dx}$. Длина касательной PS равна $y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, длина нормали PQ равна $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Разстояніе OS равно $x - y\frac{dx}{dy}$.

Примѣръ 1. Найти длину подкасательной и поднормали параболы $y = mx^2$,

$$\frac{dy}{dx} = 2mx.$$

Отсюда подкасательная $= mx^2 : 2mx = {}^1/_2 x$,

поднормаль $= y \times 2mx = 2m^2x^3$.

Примѣръ 2. Найти длину подкасательной $y = mx^n$,

$$\frac{dy}{dx} = mnx^{n-1}.$$

Подкасательная $= mx^n : mnx^{n-1} = x : n$.

Примѣръ 3. Найти, какая кривая имѣетъ поднормаль постоянную по длинѣ;

$$y\frac{dy}{dx} = a \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}y.$$

Интегралъ $\frac{1}{a}y$ по y будетъ $x = \frac{1}{2a}y^2 +$ постоянное b и это есть уравненіе кривой, гдѣ b можетъ быть какой угодно величиной. Очевидно, что эта кривая изъ семейства параболъ. (См. 9, гдѣ только x и y нужно перемѣнить мѣстами).

Примѣръ 4. Точка $x = 4$, $y = 3$ лежитъ на параболѣ $y = {}^3/_2 x^{1/2}$. Найти уравненіе касательной въ этой точкѣ.

Уклонъ равенъ $\frac{dy}{dx} = {}^1/_2 \times {}^3/_2 x^{-{}^1/_2}$, или, такъ какъ здѣсь $x = 4$, то уклонъ равенъ ${}^3/_4 \times {}^1/_2$ или ${}^3/_8$. Такимъ образомъ уравненіе касательной будетъ $y = m + {}^3/_8 x$. Для опредѣленія m мы имѣемъ условіе, что $y = 3$, когда $x = 4$, такъ какъ эта точка лежитъ на касательной, отсюда $3 = m + {}^3/_8 \times 4$, такъ что $m = 1^1/_2$, и уравненіе касательной будетъ $y = 1^1/_2 + {}^3/_8 x$.

Примѣръ 5. Точка $x = 32$, $y = 3$ очевидно лежитъ на кривой $y = 2 + {}^1/_2 x^{{}^1/_5}$. Найти уравненіе нормали въ этой точкѣ.

Уклонъ кривой здѣсь равенъ $\frac{dy}{dx} = {}^1/_{10} x^{-{}^4/_5} = {}^1/_{160}$, а уклонъ нормали $= -160$. Отсюда уравненіе нормали будетъ $y = m - 160x$, но она проходитъ черезъ точку $x = 32$, $y = 3$, отсюда $3 = m - 160 \times 32$.

Слѣдовательно $m = 5123$, и уравненіе нормали будетъ $y = 5123 - 160x$.

Примѣръ 6. Въ какой точкѣ на кривой $y = ax^{-n}$ имѣется уклонъ $= b$?

$$\frac{dy}{dx} = -nax^{-n-1}.$$

Точка эта должна имѣть абсциссу x, удовлетворяющую уравненію $-nax^{-n-1} = b$, отсюда $x = \left(-\frac{na}{b}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Зная x, мы найдемъ и y изъ уравненія кривой. Легко убѣдиться и запомнить, что, если x_1 y_1 есть точка на прямой линіи, и b—ея уклонъ, то проще всего уравненіе можетъ быть написано такъ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = b.$$

Отсюда уравненіе касательной къ кривой въ точкѣ на кривой x_1 y_1 будетъ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{dy}{dx} \text{ въ данной точкѣ.}$$

А уравненіе нормали въ данной точкѣ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{dx}{dy} \text{ въ данной точкѣ.}$$

Упражненіе 1. Найти касательную къ кривой $x^m y^n = a$ въ точкѣ $x_1\ y_1$ на кривой. Отвѣтъ: $\frac{m}{x_1}x + \frac{n}{y_1}y = m + n$.

Упражненіе 2. Найти нормаль къ той же кривой. Отвѣтъ: $\frac{n}{y_1}(x - x_1) - \frac{m}{x_1}(y - y_1) = 0$.

Упражненіе 3. Найти касательную и нормаль къ параболѣ $y^2 = 4ax$ въ точкѣ, гдѣ $x = a$.

Отвѣтъ $\quad y = x + a,\ y = 3a - x$.

Упражненіе 4. Найти касательную къ кривой

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3$$

въ точкѣ на кривой $x_1\ y_1$.

Отвѣтъ $\quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = b + 2cx_1 + 3ex_1^2$.

37. Когда y возрастаетъ до нѣкоторой опредѣленной величины и затѣмъ убываетъ, то она называется **максимальной** величиной y; когда y убываетъ до нѣкоторой опредѣленной величины и затѣмъ начинаетъ возрастать, то эта величина называется **minimum** y. Очевидно, что, какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ $\frac{dy}{dx} = 0$. См. 16 и черт. 6.

Примѣръ 1. Раздѣлить 12 на такія двѣ части, чтобы произведеніе ихъ было maximum. Человѣкъ практичный дѣлаетъ пробы и легко находитъ рѣшеніе. Онъ пробуетъ такъ. Пусть x одна часть, а $12 - x$ другая. Онъ подставляетъ $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ и т. д. и въ каждомъ случаѣ беретъ произведеніе. Тогда

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Произведеніе.	0	11	20	27	32	35	36	35	32	27

Повидимому $x = 6$, при которомъ произведеніе равно 36 будетъ вѣрнымъ отвѣтомъ. Но, если мы хотимъ быть болѣе точными, то лучше всего взять листъ клѣтчатки. Обозначимъ произведеніе черезъ y и нанесемъ на клѣтчатку соотвѣтственныя величины x и y. Студентъ долженъ это сдѣлать самъ.

Тогда легко убѣдиться, что тамъ, гдѣ y достигаетъ maximum или minimum, во всѣхъ случаяхъ уклонъ кривой $= 0$. Находимъ затѣмъ точку или нѣсколько точекъ, гдѣ $\frac{dy}{dx} = 0$.

Итакъ, если нѣкоторое число a дѣлится на двѣ части, одинъ изъ которыхъ x, и другая $a - x$, то произведеніе ихъ $y = x(a - x) = ax - x^2$ и $\frac{dy}{dx} = a - 2x$. Находимъ точку, гдѣ послѣднее равно 0. Очевидно, что это будетъ, когда $2x = a$ или $x = {}^1/_2 a$.

Практичный человѣкъ, рѣшая подобныя задачи, не встрѣтитъ большого затрудненія въ рѣшеніи вопроса о томъ, что онъ нашелъ, maximum или minimum. Въ нашемъ случаѣ $a = 12$. Тогда $x = 6$ даетъ произведеніе 36. Теперь, если $x = 5{\cdot}999$, другая часть $6{\cdot}001$ и произведеніе будетъ $35{\cdot}999999$, такъ что $x = 6$ даетъ большее произведеніе, чѣмъ $x = 5{\cdot}999$ или $x = 6{\cdot}001$, значитъ мы здѣсь имѣемъ maximum, а не minimum. Это единственный методъ, который можно указать студенту для различенія maximum отъ minimum въ его первыхъ работахъ.

Примѣръ 2. Раздѣлить число a на такія двѣ части, чтобы сумма квадратовъ ихъ была minimum. Если x—одна часть, то другая будетъ $a - x$. Теперь вопросъ заключается въ томъ: если $y = x^2 + (a - x)^2$, то, когда y minimum?

$$y = 2x^2 + a^2 - 2ax,$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 2a, \text{ и это равно 0 при } x = {}^1/_2 a.$$

Примѣръ 3. Когда сумма числа и обратной его величины будетъ наименьшая? Пусть x будетъ число и $y = x + \frac{1}{x}$. Когда y minimum?

Производная отъ $\frac{1}{x}$ или x^{-1} будетъ $-x^{-2}$. Мы имѣемъ
$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$ и это равно 0 при $x = 1$.

Студентъ долженъ брать числа и дѣлать пробы на листѣ клѣтчатки. Пусть онъ возьметъ $x = 100$, 10, 4 и т. д., онъ получитъ

x	100	10	4	2	1	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_4$
y	100·01	10·1	4·25	2·5	2	2·5	$3^1/_3$	$4^1/_4$

Теперь пусть онъ нанесетъ на чертежъ x и y и онъ убѣдится въ томъ, что y minimum при $x = 1$.

Примѣръ 4. **Прочность прямоугольной балки** данной длины для опредѣленной нагрузки и опредѣленнаго расположенія опоръ пропорціональна ширинѣ сѣченія, умноженной на квадратъ высоты. Если данъ діаметръ a цилиндрическаго бревна, то какой можно вырѣзать изъ него брусъ самой большой прочности? Пусть x ширина его. Тогда, если мы начертимъ прямоугольникъ вписанный въ кругъ, то мы увидимъ, что высота его будетъ $\sqrt{a^2 - x^2}$. Отсюда прочность будетъ maximum, когда y будетъ maximum, если

$$y = x(a^2 - x^2)$$

или

$$y = a^2x - x^3;$$

но $\frac{dy}{dx} = a^2 - 3x^2$ и это равно 0, когда $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Такимъ же путемъ можно найти, какъ изъ бревна получить наиболѣе *жесткую* балку, сдѣлавъ ширину $\times$ кубъ высоты maximum.

Однако съ рѣшеніемъ этого вопроса придется подождать до тѣхъ поръ, пока студентъ не прочтетъ III главы.

Примѣръ 5. Опыты со **взрывомъ смѣсей** (при атмосферномъ давленіи) привели къ довольно точному закону

$$p = 83 - 3{\cdot}2x,$$

гдѣ p—самое высокое давленіе проявляющееся при взрывѣ

а x объемъ воздуха вмѣстѣ съ продуктами предварительнаго горѣнія, сложенный съ однимъ кубическимъ футомъ угольнаго газа до взрыва. Если мы примемъ px, какъ величину приблизительно пропорціональную работѣ, произведенной въ газовой машинѣ въ теченіи взрыва и расширенія, то какая величина x сдѣлаетъ ее максимальной, т. е. когда будетъ $83x - 3{\cdot}2x^2$ maximum?

Отвѣтъ: когда $83 - 6{\cdot}4x = 0$ или x около 13 куб. футъ.

Я боюсь сдѣлать Mr Grover отвѣтственнымъ за вышеприведенный результатъ, выведенный мною изъ его опытовъ. Самое интересное изъ его выводовъ было то, что изъ вышеуказанныхъ 13 куб. футъ гораздо лучше, чтобы только 9 или 10 куб. футъ было воздуха, чѣмъ, чтобы все былъ одинъ только воздухъ.

Примѣръ 6. Доказать, что $ax - x^2$ будетъ maximum при $x = {}^1/_2 a$.

Примѣръ 7. Доказать, что $x - x^3$ будетъ maximum, когда

$$x = {}^1/_3\sqrt{3}.$$

Примѣръ 8. Данъ **объемъ** круговой цилиндрической **цистерны** (безъ крышки); когда ея поверхность будетъ minimum?

Пусть x будетъ радіусъ, y высота; объемъ будетъ

$$\pi x^2 y = \text{положимъ, } a \; \ldots\ldots\ldots (1).$$

Поверхность $$\pi x^2 + 2\pi xy \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Когда она будетъ minimum?

Изъ (1) $y = \dfrac{a}{\pi x^2}$; подставляя это въ (2), мы видимъ, что должно быть

$$\pi x^2 + \frac{2a}{x} \text{ minimum}$$

$$2\pi x - \frac{2a}{x^2} = 0 \text{ или } x^3 = \frac{a}{\pi},$$

$$x^3 = \frac{\pi x^2 y}{\pi} \text{ или } x = y.$$

Радіусъ основанія долженъ быть равенъ высотѣ цистерны.

Примѣръ 9. Пусть цистерна изъ примѣра 8 будетъ закрыта сверху и снизу. Найти, когда при данномъ объемѣ поверхность будетъ наименьшей.

Поверхность равна $2\pi x^2 + 2\pi xy$, и, поступая, какъ и выше, найдемъ, что діаметръ цистерны долженъ быть равенъ высотѣ ея.

Примѣръ 10. Пусть v скорость теченія воды въ рѣкѣ и x скорость относительно воды идущаго противъ теченія судна, и, положимъ, количество **топлива, сжигаемаго въ часъ,** равно $a + bx^3$;—найти скорость x такую, чтобы расходъ топлива былъ минимумъ для даннаго разстоянія m. Скорость судна относительно берега рѣки равна $x - v$, время пробѣга $\frac{m}{x-v}$, и потому количество топлива сожженнаго, во время пробѣга, равно $\frac{m(a+bx^3)}{x-v}$.

Замѣтимъ, что $a + bx^3$ съ соотвѣтствующими величинами для a и b можетъ представлять полный расходъ въ часъ на пароходъ, включая проценты и погашеніе стоимости судна, а также стоимость жалованья прислугѣ и провизіи.

Мы пока не умѣемъ дифференцировать частнаго, такъ что я приму $a = 0$ и вопросъ приводится къ слѣдующему: когда $\frac{x^3}{x-v}$ minimum? Но это равносильно вопросу: когда $\frac{x-v}{x^3}$ maximum? или, когда $x^{-2} - vx^{-3}$ maximum? Производная равна $-2x^{-3} + 3vx^{-4}$. Полагая ее равной 0, находимъ $x = {}^3/_2 v$, т. е. скорость судна относительно воды въ полтора раза болѣе скорости теченія.

Замѣтимъ, что здѣсь, какъ и во всѣхъ другихъ случаяхъ maximum'а и minimum'а, инженеръ не долженъ удовлетворяться подобнымъ отвѣтомъ. Несомнѣнно, что $x = {}^3/_2 v$ представляетъ самую лучшую скорость, ибо она обращаетъ $x^3 : (x - v)$ въ minimum. Но положимъ, что судно движется съ большей или меньшей скоростью, чѣмъ въ данномъ слу-

чаѣ, будетъ ли разница велика? Пусть $v=6$, тогда наивыгоднѣйшее x будетъ равно 9.

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{x-v} &= 243 \text{ при } x=9,\\ &= 250 \text{ при } x=10,\\ &= 256 \text{ при } x=\ \ 8.\end{aligned}$$

Эти числа говорятъ намъ о величинѣ излишняго расхода въ томъ случаѣ, когда принята скорость не теоретически точная *).

---

*) Предполагая, что вы знаете правило дифференцированія частнаго,—что обыкновенно усваивается въ самомъ началѣ изученія анализа, и уже не принимая a равнымъ 0, какъ это сдѣлано выше, мы напишемъ

$$(x-v)\,3bx^2 = a + bx^3$$

$$2bx^3 - 3bvx^2 = a \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

По даннымъ a, b и v можно путемъ пробныхъ подстановокъ найти подходящую величину x. Итакъ, пусть расходъ въ день будетъ $30 + {}^1/_{20}x^3$, такъ что $a=30$, $b={}^1/_{20}$ и пусть $v=6$. Находимъ x изъ (1), которое принимаетъ видъ

$$x^3 - 9x^2 - 300 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Я нахожу, что $x=11{\cdot}3$ будетъ достаточно точнымъ отвѣтомъ.

Это — кубическое уравненіе, и потому имѣетъ три корня. Но инженеръ имѣетъ нужду только въ одномъ корнѣ. Онъ знаетъ, около какой величины должно находиться его значеніе и онъ желаетъ знать его только приблизительно. **Онъ рѣшаетъ уравненіе, каково бы оно ни было,** такимъ образомъ.

Пусть x^3-9x^2-300 обозначено черезъ $f(x)$. Спрашивается, какая величина x дѣлаетъ его равной 0? Пробуемъ $x=10$, $f(x)$ обращается въ -200, между тѣмъ

x	10	8	12	11	11·3
$f(x)$	-200	-360	$+176$	-57	-6

мы желаемъ, чтобы она была $=0$. Теперь я пробую 8. Это даетъ -360, которое еще болѣе не подходитъ. Я пробую 12 и получаю 176, такъ что x очевидно лежитъ между 10 и 12. Затѣмъ я пробую $x=11$ и нахожу -57. Хорошо воспользоваться клѣтчаткой и начертить кривую $y=f(x)$ между $x=10$ и $x=12$. Повторяя этотъ процессъ, можно найти правильный отвѣтъ съ нѣсколькими десятич-

Примѣръ 11. Сумма квадратовъ двухъ множителей произведенія a должна быть minimum; найти ихъ. Если x одинъ изъ нихъ, то другой будетъ равенъ $\frac{a}{x}$, и $y = x^2 + \frac{a^2}{x^2}$ должно быть minimum; $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2a^2}{x^3}$. Это равно 0, когда $x^4 = a^2$ или $x = \sqrt{a}$.

Примѣръ 12. Расположить n **вольтовыхъ элементовъ** такъ, чтобы получить maximum силы тока при сопротивленіи R. Пусть электродвижущая сила каждаго элемента будетъ e и внутреннее его сопротивленіе r. Если элементы расположены по x послѣдовательно и $\frac{n}{x}$ въ параллельномъ соединеніи, то электродвижущая сила баттареи будетъ xe, а внутреннее сопротивленіе $\frac{x^2r}{n}$, отсюда сила тока

$$C = xe : \left(\frac{x^2r}{n} + R\right).$$

Такъ какъ студентъ еще не умѣетъ дифференцировать частнаго, то мы скажемъ, что C maximum тогда, когда его обратная величина minimum, такъ что можемъ поставить вопросъ такъ: когда $\left(\frac{x^2r}{n} + R\right) : xe$ или $\frac{xr}{n} + \frac{R}{x}$ будетъ minimum? Производная отъ этого выраженія будетъ $\frac{r}{n} - \frac{R}{x^2}$ и это равно 0, когда $R = \frac{x^2r}{n}$, т. е. внутреннему сопротивленію баттареи.

Отсюда мы имѣемъ такое правило: располагать баттарею такъ, чтобы ея внутреннее сопротивленіе было какъ можно близко къ внѣшнему сопротивленію.

ными знаками. Въ настоящемъ случаѣ нѣтъ нужды въ большой точности и я считаю 11,3 достаточно точнымъ отвѣтомъ. Замѣтимъ, что прежній отвѣтъ, полученный въ предположеніи $a = 0$, былъ равенъ 9. Человѣкъ практичный найдетъ много пищи для размышленій по поводу этихъ двухъ результатовъ. Замѣтимъ, что капитанъ рѣчнаго судна долженъ всегда умѣть дѣлать подобнаго рода разсчеты, даже еслибы онъ и не долженъ былъ представлять объ этомъ отчетъ.

Примѣръ 13. **Вольтовъ элементъ** имѣетъ электродвижущую силу e и внутреннее сопротивленіе r; внѣшнее сопротивленіе равно R. Сила тока $C = \frac{e}{r+R}$. Производимая энергія равна $P = RC^2$. Какая величина R сдѣлаетъ P maximum?

$$P = R\frac{e^2}{(r+R)^2}$$

Поступая по предыдущему, мы можемъ поставить вопросъ такъ: какая величина R должна сдѣлать $\frac{(r+R)^2}{R}$ или $\frac{r^2+2Rr+R^2}{R}$ или $r^2R^{-1}+2r+R$ minimum?

Приравнивая производную по R нулю, мы имѣемъ $-r^2R^{-2}+1=0$, такъ что $R=r$, или внѣшнее сопротивленіе должно быть равно внутреннему сопротивленію.

Примѣръ 14. Каковъ объемъ самого большого ящика, какой только можно отправить **по почтѣ?** Пусть x будетъ длина, y и z ширина и высота. Правило почтоваго вѣдомства таково, чтобы длина + поперечный периметръ не превосходили 6 футъ. Такимъ образомъ, мы должны найти maximum $v=xyz$ при условіи, чтобы $x+2(y+z)=6$. Очевидно, что y и z входятъ въ наши выраженія совершенно одинаковымъ образомъ, отсюда $y=z$, такъ что $x+4y=6$ и $v=xy^2$ должно быть maximum. Такъ какъ $x=6-4y$, то имѣемъ, что $v=(6-4y)\;y^2=6y^2-4y^3$ должно быть maximum. Полагая $\frac{dv}{dy}=0$, мы имѣемъ $12y-12y^2=0$. Отбрасывая одно рѣшеніе $y=0$ по очевидной причинѣ, получаемъ $y=1$, т. е. нашъ ящикъ долженъ имѣть два фута въ длину, 1 футъ въ ширину и 1 футъ въ высоту, при 2 куб. фут. вмѣстимости.

Найти объемъ самаго большого цилиндрическаго тюка, который можно послать по почтѣ. Пусть длина будетъ l и діаметръ d; $l+\pi d=6$ и $\frac{\pi}{4}ld^2$ должно быть maximum.

Отвѣтъ: $l = 2$ фута, $d = \frac{4}{\pi}$ фута, объемъ $= \frac{8}{\pi}$ или $2{\cdot}55$ куб. футъ.

Примѣръ 15. **Пружина Ayrton-Perry**. Профессоръ Ayrton и авторъ настоящей книги замѣтили, что, когда спиральная пружина закрѣплена однимъ концомъ и подвержена дѣйствію силы F по оси, то свободный конецъ ея стремится вращаться. Далѣе легко было вывести общую формулу для удлиненія и вращенія пружины данныхъ размѣровъ, и, руководствуясь только однимъ вышеизложеннымъ принципомъ, мы нашли, какіе размѣры ея должны быть, чтобы вращеніе ея было достаточно большимъ.

Такъ, напримѣръ, если уголъ спирали α, то вращеніе пропорціонально $\sin \alpha \cos \alpha$. Отсюда сейчасъ же слѣдуетъ, что α должно быть равно 45^0.

Если проволока имѣетъ эллиптическое сѣченіе, причемъ главныя полуоси эллипса суть x и y, мы находимъ, что вращеніе пропорціонально

$$\frac{x^2 + y^2}{x^3 y^3} - \frac{8}{5xy^3}.$$

Надо найти maximum этого выраженія для даннаго сѣченія (которое пропорціонально xy). Пусть $xy = s$—постоянно, тогда вышеупомянутое выраженіе принимаетъ видъ

$$\frac{y^2}{s^3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{sy^2}$$ и это должно быть maxi um.

Здѣсь мы видимъ, что настоящаго maximum нѣтъ. Сдѣлаемъ ли мы y большимъ или меньшимъ, (для малыхъ величинъ y вращеніе будетъ отрицательно, но мы не заботимся о направленіи вращенія, т. е. о томъ, будетъ ли оно направлено по обыкновенному направленію крученія, или нѣтъ) уголъ вращенія увеличится. Вотъ почему мы пришли къ необходимости дѣлать пружины изъ тонкихъ полосокъ металла, свернутыхъ въ спираль съ угломъ 45^0. Уголъ вращенія, получаемый для совсѣмъ ничтожныхъ силъ и осевыхъ удлиненій, весьма значителенъ. Открытіе этихъ очень полезныхъ пружинъ было завершено, когда мы убѣдились, что всякая пружина вращается при дѣйствіи на нее силы.

приложенной по оси. Студенты, интересующіеся практическими приложеніями математики, могутъ найти полный расчетъ, сюда относящійся, въ нашей статьѣ, помѣщенной въ «*Proceeding of the Royal Society*» за 1884 годъ.

Примѣръ 16. Изъ гипотетической **индикаторной діаграммы** слѣдуетъ, что индикаторная работа, произведенная однимъ кубическимъ футомъ пара, выражается такъ

$$w = 144p_1(1 + \log r) - 144rp_3 - x,$$

гдѣ p_1 и p_3 суть начальное давленіе и давленіе отработавшаго пара, r есть степень расширенія пара (т. е. отсѣчка производится на $\frac{1}{r}$ хода поршня), а x потеря, соотвѣтствующая **конденсаціи въ цилиндрѣ**; x зависитъ отъ r.

1) Если бы x было $= 0$, то при какой величинѣ r индикаторная работа одного куб. фута пара была бы наибольшей?

Беремъ $\frac{dw}{dr} = 0$ и находимъ $\frac{144p_1}{r} - 144p_3 = 0$, отсюда $r = \frac{p_1}{p_3}$. Если мы хотимъ найти maximum энергіи на 1 куб. футъ пара, *получаемой на окружности махового колеса*, то мы должны къ p_3 прибавить членъ, выражающій треніе частей машины.

2) М-ръ Willans опытнымъ путемъ нашелъ, что для машины безъ конденсаціи пара maximum индикаторной работы w даетъ $r = \frac{p_1}{p_3 + 10}$. Если въ предыдущемъ примемъ $\frac{dw}{dr} = 0$, то получимъ

$$\frac{144p_1}{r} - 144p_3 - \frac{dx}{dr} = 0.$$

Отсюда $\frac{dx}{dr} = \frac{144p}{p_1}(p_3 + 10) - 144p_3$ или $\frac{dx}{dr} = 1440$.

Т. е. $x = 1440r +$ постоянное. Такимъ образомъ, практическій выводъ Mr. Willans приводитъ насъ къ понятію, что потеря энергіи на куб. футъ пара есть линейная функція r.

Мы приводимъ здѣсь этотъ расчетъ, какъ прекрасное упражненіе въ maxima и minima. Что касается до практическаго значенія результата, то тутъ можно говорить и за, и противъ. Кажется, какъ будто взято слишкомъ большое противодѣйствующее давленіе въ 10 фунтовъ на кв. дюймъ, выражающее вліяніе конденсаціи.

Mr Willans нашелъ опытнымъ путемъ, что для машины безъ конденсаціи пара количество воды, представляющее потерю ея на одну индикаторную лошадиную силу въ часъ есть линейная функція r при томъ же количествѣ пара въ котлѣ — но это не то же, что наше x Мы иногда принимаемъ, что отношеніе количества конденсированнаго пара къ индикаторному пропорціонально $lg\ r$, но, согласно съ данными опыта, можно принять его и какъ линейную функцію r.

Примѣръ 17. **Вѣсъ газа, протекающаго въ секунду черезъ отверстіе** изъ одного сосуда съ давленіемъ p_0 въ другой, гдѣ давленіе p, пропорціонально $\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{1-\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$; гдѣ α равно $\frac{p}{p_0}$, а γ извѣстное постоянное. Когда этотъ вѣсъ будетъ maximum? иначе, когда $\alpha^{\frac{2}{\gamma}}-\alpha^{1+\frac{1}{\gamma}}$ будетъ maximum? См. 74, гдѣ этотъ примѣръ снова разбирается.

Дифференцируя по α и приравнивая производную 0, находимъ

$$p=p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Въ случаѣ воздуха $\gamma=1{\cdot}41$, и мы находимъ $p=0{\cdot}527p_0$, т. е. максимальное количество газа выходитъ изъ сосуда въ секунду тогда, когда внѣшнее давленіе немного болѣе половины внутренняго давленія.

Примѣръ 18. Обыкновенно принимаютъ, что расходъ для **проводника, проводящаго электричество,** состоитъ во 1) изъ электрической потери, величина которой равна C^2r уаттовъ. гдѣ r есть сопротивленіе въ омахъ одной мили

проводника въ прямомъ и обратномъ направленіи, а C сила тока въ амперахъ; 2) расхода на проценты и погашеніе стоимости проводника. Я бралъ прейскуранты фабрикъ, вырабатывающихъ проводники, а также цѣны изъ условій на прокладку ихъ и нашелъ, что во всѣхъ случаяхъ для одинаковыхъ проводниковъ, одинаковымъ образомъ проложенныхъ или подвѣшенныхъ сверху, стоимость одной мили проводника на практикѣ пропорціональна вѣсу въ немъ мѣди, т. е. обратно пропорціональна сопротивленію плюсъ нѣкоторая постоянная. Расходъ въ годъ получится, если стоимость одной тонны мѣди умножить на число представляющее величину процента и погашенія. Мы можемъ опредѣлить этотъ расходъ въ годъ или въ секунду и выразить его въ монетной единицѣ, имѣя величину электрической потери въ уаттахъ. Но мы не можемъ складывать вмѣстѣ этихъ расходовъ, пока не знаемъ стоимости въ годъ или одну секунду одного уатта. Задавшись тремя величинами, можно опредѣлить эту величину, которую мы назовемъ t^2. Я предпочитаю выражать общій расходъ лучше въ уаттахъ, чѣмъ въ фунтахъ стерлинговъ въ годъ и нахожу, что y равно $C^2r+\frac{t^2}{r}+b$, гдѣ b есть нѣкоторое постоянное. Въ упражненіяхъ можно t принимать отъ 17 до 40, но пусть лучше студенты сами подбираютъ числа для стоимости энергіи, мѣди и для величины процента *).

*) Вѣсъ мѣди въ одной милѣ проводника, имѣющаго сѣченіе площадью a квадратныхъ дюймовъ, легко вычислить. Пусть онъ будетъ равенъ ma тоннъ. Если p стоимость въ фунтахъ стерлинговъ одной тонны мѣди, то стоимость проводника можно приблизительно принять $pma+$ нѣкоторая постоянная. Если R величина процента и погашенія, то расходъ въ годъ для проводника выразится въ фунтахъ въ видѣ $\frac{R}{100}pma+$ постоянное. Если 1 фунтъ представляетъ стоимость w уаттовъ въ годъ (замѣтимъ, что эта величина w должна быть тщательно опредѣлена. Если по проводнику будетъ пропускаться токъ полныя сутки и постоянно, то w легко опредѣлить), тогда постоянный расходъ для проводника будетъ $\frac{R}{100}wpma+$ постоянное. Принявъ $a=\frac{0{,}04}{r}$, мы находимъ, что $t^2=\frac{Rwpm}{2500}$.

Нѣкоторые думаютъ, что рѣшеніе такой задачи дастъ имъ наивыгоднѣйшую силу тока въ любомъ проводникѣ и при всякихъ об-

Опредѣлить minimum полнаго расхода y для данной силы тока C? иначе говоря, какой будетъ наиболѣе экономный проводникъ для данной силы тока?

$$\frac{dy}{dr} = C^2 - \frac{t^2}{r^2}, \text{ и это равно } 0 \text{ при } r = \frac{t}{C}.$$

Такъ, если $t = 40$, $r = \frac{40}{C}$.

Если a есть площадь въ дюймахъ сѣченія проводника, то приблизительно $r = \frac{0 \cdot 04}{a}$, такъ что $C = 1000a$, или для каждой тысячи амперъ силы тока надо брать въ проводникѣ 1 квадр. дюймъ сѣченія.

Если u есть функція **болѣе чѣмъ одного независимаго перемѣннаго**, положимъ, x и y, тогда будемъ имѣть два уравненія $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, при чемъ y принимается за постоянное, и $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$, при чемъ x принимается при дифференцированіи за постоянное; эти уравненія дадутъ значенія x

---

стоятельствахъ. Но, хотя вышеозначенныя статьи расхода суть наиболѣе важныя, однако въ длинныхъ кабеляхъ могутъ оказаться и другія статьи расхода, которыя здѣсь не приняты во вниманіе. Расходъ, являющійся слѣдствіемъ вреднаго дѣйствія мигающаго свѣта на нервы и на зрѣніе, расходъ, вызываемый требованіями комфорта; удороженіе энергіи вслѣдствіе увеличенія разстоянія, на которое передается токъ.

Если только удастся написать математическое выраженіе, представляющее полный расходъ для какого либо механизма, какъ функцію величины одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, то очень легко найти наивыгоднѣйшее или наивыгоднѣйшія значенія перемѣнныхъ; но не всегда легко написать такую функцію. И однако, это—задача, которую искусный инженеръ долженъ всегда задавать себѣ; съ увеличеніемъ какой либо величины получается лучшій или худшій результатъ; это ничто иное, какъ задача на maxima и minima.

Замѣтимъ также слѣдующее. Положимъ мы нашли величину x, которая дѣлаетъ y maximum; можетъ быть, что значенія x, отличающіяся отъ этого, дадутъ величину y, которая будетъ мало отличаться отъ своего максимальнаго значенія. Хорошій инженеръ практикъ обратитъ на это вниманіе и въ подобныхъ случаяхъ не станетъ слишкомъ строго настаивать на примѣненіи найденнаго значенія x.

и y, обращающія u въ maximum или minimum. Здѣсь однако слѣдовало бы еще кое что прибавить относительно того, какъ узнать, будетъ ли найденная величина maximum или minimum, или maximum относительно x и minimum относительно y, но мы не можемъ здѣсь входить въ разсмотрѣніе этого вопроса.

Иногда въ этомъ случаѣ, хотя u и будетъ функціей x и y, можно найти законъ, связующій x и y, и немного соображенія понадобится для инженера, чтобы справиться съ своей задачей. Желательно во всѣхъ работахъ возможно меньше придерживаться проторенныхъ дорогъ; самостоятельная идея, примѣненная къ какой либо задачѣ, можетъ дать рѣшеніе для самаго труднаго случая помощью минимума математическихъ выкладокъ.

Такъ, напримѣръ, положимъ, что мы хотимъ найти наивыгоднѣйшій проводникъ, но не для данной силы тока, а, положимъ, что данной является энергія, которую нужно доставить на извѣстное разстояніе. Если это растояніе равно n миль, и проводникъ имѣетъ сопротивленіе r омовъ на милю (туда и обратно), если V_1 есть разность потенціаловъ у зажимовъ генератора, а C сила тока, тогда разность потенціаловъ на оконечностяхъ пріемника будетъ V, причемъ $V_1 - V = Cnr$. $CV = P$ — постоянно, а расходъ на милю будетъ $y = C^2r + \frac{t^2}{r} \ldots .(1)$, гдѣ t^2 извѣстно. Когда y будетъ maximum?

Здѣсь и C и r могутъ измѣняться, но въ зависимости другъ отъ друга. Такъ какъ $V = V_1 - Cnr$, то $P = CV_1 - C^2nr \ldots (2)$. Самый простой способъ рѣшенія задачи будетъ, — выразить y въ функціи или r только, или C. Такъ изъ (2) находимъ $r = \frac{CV_1 - P}{C^2n} \ldots\ldots (3)$.

Подставляя это въ (1), получимъ

$$y = \frac{CV_1 - P}{n} = \frac{t^2C^2n}{CV_1 - P} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Здѣсь всѣ величины постоянны кромѣ C, такъ что мы можемъ найти значеніе C, при которомъ y будетъ minimum, а, зная C, найдемъ изъ (3) и r.

Пока предполагается, что студентъ умѣетъ дифференцировать только x^n, поэтому рѣшеніе этой задачи откладываемъ до тѣхъ поръ, пока онъ не продѣлаетъ нѣсколько примѣровъ изъ главы III *).

*) Дифференцированіе (4) въ III главѣ составляетъ одно изъ самыхъ легкихъ упражненій; оно приводитъ къ

$$\frac{dy}{dC} = \frac{V_1}{n} + \frac{(CV_1 - P)\,2t^2Cn - t^2C^2nV_1}{(CV_1 - P)^2};$$

Въ своихъ лекціяхъ о гидравлическихъ механизмахъ я выводилъ выраженіе для общаго расхода въ фунтахъ въ годъ при гидравлической передачѣ энергіи помощью трубопровода. Я выражалъ его въ зависимости отъ максимальнаго давленія, количества передаваемой энергіи и діаметра d трубы. Легко было подобрать такое d, чтобы полный расходъ былъ minimum. Я принимаю давленіе p у пріемника постояннымъ, также передаваемую энергію постоянной, отсюда нахожу Q расходъ воды въ кубическихъ футахъ въ секунду, и прибавивъ расходъ на укладку пропорціональный квадрату діаметра, я легко получаю для общаго расхода такое выраженіе

$$y = a\frac{lQ^3}{d^5} + b\frac{l^2Q^2}{d^3} + cld^2,$$

гдѣ величины a, b и c зависятъ отъ стоимости энергіи, отъ процентовъ на стоимость желѣза и т. д. Это выраженіе будетъ minimum, когда его производная по d будетъ равна 0 или

$$2cld = 5alQ^3d^{-6} + 3bl^2Q^2d^{-4},$$

отсюда d можетъ быть найдено помощью пробныхъ подстановокъ. Коэффиціенты b и c зависятъ также отъ прочности матерьяла, такъ что отсюда можно вывести, что́ будетъ дешевле въ общемъ, сварочное или литое желѣзо. Но *и* здѣсь мы пренебрегли однимъ членомъ, именно, стоимостью машины и насосовъ.

Слѣдующій примѣръ будетъ здѣсь кстати, хотя онъ и не касается maxima и minima.

Электрическій проводникъ на каждой милѣ своей длины распредѣляетъ по a амперовъ. Пусть x разстояніе въ миляхъ нѣкоторой точки отъ конца линіи, удаленнаго отъ генератора, C сила тока и V разность потенціаловъ въ этой точкѣ. Пусть сопротивленіе проводника на милю будетъ r, (то есть, считая одну милю въ прямомъ направленіи и одну милю въ обратномъ). Токъ, распредѣленный на протяженіи δx, будетъ δC или $\delta x \frac{dC}{dx}$, а энергія $\delta x\ V \frac{dC}{dx}$, такъ

приравнявъ это нулю, получимъ искомое значеніе C. Но лучше продѣлать это упражненіе, задавшись численными величинами; такъ, возьмите $V_1 = 300$ вольтъ, $n = 10$ миль, $P = 20000$ уаттовъ, $t^2 = 1600$. найдите C, а затѣмъ и r.

Если представятся какія либо дальнѣйшія трудности, то отсылаемъ читателя къ статьѣ въ *Journal of the Institution of the Society of Telegraph. Engineers*, стр. 120, томъ XV, 1886 года.

До сихъ поръ еще мало обращалось вниманія на то, что если даны V_1, P и r, то предѣльная длина линіи

$$n = V_1^2 : 4rP,$$

и въ этомъ случаѣ P въ точности равно электрической потерѣ въ проводникѣ.

что энергія на одну милю (замѣтьте выраженіе на милю) будетъ

$$P = V\frac{dC}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Если V есть разность потенціаловъ въ x, то въ $x+\delta x$ будетъ $V+\delta V$; такъ какъ сопротивленіе части δx равно $r\delta x$, то сила тока будетъ $\delta V : r\delta x$, и по мѣрѣ того, какъ δx будетъ безконечно убывать, сила тока будетъ приближаться къ предѣлу

$$C = \frac{1}{r}\,\frac{dV}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Такъ какъ $\frac{dC}{dx} = a$, то $C = ax$, если $C = 0$ при $x = 0$.

Отсюда при r постоянномъ (2) приметъ видъ

$$rax = \frac{dV}{dx}, \text{ такъ что } V = V_0 + {}^1\!/\!_2 rax^2 \ldots\ldots\ldots (3).$$

при чемъ V_0 означаетъ разность потенціаловъ въ концѣ линіи.

(1) получаетъ видъ

$$P = aV_0 + {}^1\!/\!_2 ra^2x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Принявъ $V_0 = 200$ вольтъ, $a = 25$ амперъ на милю, $r = 1$ ому на милю, легко увидѣть на численномъ примѣрѣ, какъ энергія, распредѣляемая на протяженіи мили, и разность потенціаловъ уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ генератора.

x	V	P
0	200	5000
1	212·5	5312
2	250	6250
3	312·5	7812
4	400	10,000

Если V_1 есть разность потенціаловъ у зажимовъ динамомашины, и линія имѣетъ въ длину n миль, то $V_1 = V_0 + {}^1\!/\!_2 arn^2$ изъ (4)

Такъ какъ энергія, распредѣляемая на милю въ концѣ линіи равна $P = aV_0$, то, если мы зададимся V_1 и P_0, иначе говоря, V_0, то найдемъ, что n не должно быть болѣе, чѣмъ

$$\frac{V_1}{\sqrt{2rP_0}}$$

этимъ опредѣляется предѣльная длина линіи.

Если мы желаемъ, положимъ, въ электрической тягѣ получить приблизительно однообразное P, то мы можемъ попробовать принять

$$C = ax - bx^c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

гдѣ a, b и c суть постоянныя,

$$\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dx} = ax - bx^c$$

$$V = V_0 + {}^1/_2 rax^2 - \frac{rb}{c+1}x^{c+1} \dots\dots\dots\dots (6).$$

Такъ какъ $P = V\dfrac{dC}{dx}$ или $V\,(a - cbx^{c-1})$, то мы легко опредѣлимъ три постоянныя a, b и c такъ, чтобы P оставалось постояннымъ въ какихъ либо трехъ точкахъ линіи. Такъ, пусть $r = 1$ ому, $V = 100$ вольтъ, и пусть $P = 10000$ уаттовъ, при чемъ $x = 0$, $x = 1$, $x = 1^1/_2$ мили.

Помощью пробныхъ подстановокъ мы найдемъ, что должно быть

$$C = 100x - 14{\cdot}75x^{2{\cdot}115},$$

и отсюда легко вычислить C для любой точки линіи.

Примѣръ 19. Нѣкоторая машина стоитъ $ax + by$, а ея полезность для меня пропорціональна xy, найти наивыгоднѣйшія значенія для x и y, если дана ея стоимость. Здѣсь xy должно быть maximum. Пусть $c = ax + by$, такъ что $y = \dfrac{c}{b} - \dfrac{a}{b}x$ и $xy = \dfrac{c}{b}x - \dfrac{a}{b}x^2$. Это будетъ maximum, когда $\dfrac{c}{b} = 2\dfrac{a}{b}x$ или $ax = \dfrac{c}{2}$. Отсюда $ax = by = \dfrac{c}{2}$ дѣлаетъ xy maximum.

Примѣръ 20. Электрическая постоянная времени цилиндрической обмотки изъ проволоки приблизительно равна

$$u = mxyz\;(ax + by + cz),$$

гдѣ x — средній радіусъ, y — разность между внѣшнимъ и внутреннимъ радіусами, z—длина по оси, m, a, b и c извѣстныя постоянныя.

Объемъ обмотки равенъ $2\pi xyz$.

Найти значенія x, y, z, обращающія u въ maximum при данномъ объемѣ обмотки. Пусть $2\pi xyz = g$; когда $\dfrac{a}{yz} + \dfrac{b}{xz} + \dfrac{c}{xy}$ будетъ maximum? Иначе говоря, исключая z, когда $ax + by + \dfrac{gc}{2\pi xy}$ равное, положимъ, v, будетъ mini-

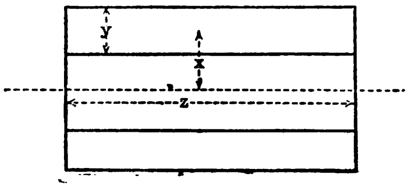
mum? Такъ какъ x и y совершенно независимы, то нужно взять $\left(\frac{dv}{dx}\right)=0$ и $\left(\frac{dv}{dy}\right)=0$, отсюда

$$a+0-\frac{gc}{2\pi yx^2}=0,$$

$$0+b-\frac{gc}{2\pi xy^2}=0,$$

такъ что $x^2y=\frac{gc}{a2\pi}$,

$$xy^2=\frac{gc}{b2\pi},$$



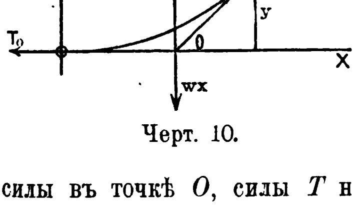
Черт. 9.

и $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$ или $y=\frac{ax}{b}$, отсюда $x^2\frac{ax}{b}=\frac{gc}{a2\pi}$,

$$x^3=\frac{bgc}{a^2 2\pi} \text{ или } x=\sqrt[3]{\frac{cbg}{a^2 2\pi}},$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{agc}{2\pi b^2}}, \text{ а } z=\frac{g}{2\pi xy} \text{ или } z=\sqrt[3]{\frac{abg}{2\pi c^2}}.$$

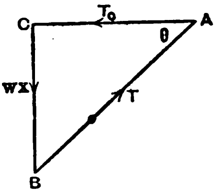
38. Цѣпь висячаго моста поддерживаетъ грузъ при помощи отдѣльныхъ стержней. Грузы приблизительно равны и находятся на равныхъ разстояніяхъ. Предположимъ, что цѣпь нагружена непрерывно и что нагрузка на единицу *горизонтальной* длины ея равна w. Полагая однообразная цѣпь или телеграфная проволока находятся приблизительно въ такихъ условіяхъ. Каковъ ея видъ? Пусть O будетъ самая пониженная точка. OX горизонтальная линія, касательная къ цѣпи въ точкѣ O. OY есть вертикалъ. Пусть P будетъ какая нибудь точка на цѣпи и ея координаты x и y. Разсмотримъ условія равновѣсія части OP. OP находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ силы T^0—горизонтальной растягивающей силы въ точкѣ O, силы T наклонной касательной въ точкѣ



Черт. 10.

P и wx груза, приходящагося на OP и дѣйствующаго вертикально. Мы примѣняемъ законъ дѣйствія силъ на твердое тѣло. Твердое тѣло — это такое, которое не претерпѣваетъ измѣненій подъ вліяніемъ силъ.

Если мы начертимъ треугольникъ, стороны котораго параллельны этимъ силамъ, то онѣ будутъ пропорціональны имъ, и если θ уголъ наклоненія T къ горизонту, то



Черт. 11.

$$\frac{T_0}{T} = \cos\theta \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\frac{wx}{T_0} = \operatorname{tg}\theta \ldots\ldots\ldots (2),$$

но $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$, такъ что $\frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0} x$. .(3);

отсюда, интегрируя, получимъ

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{w}{T_0} x^2 + \text{постоянное}.$$

Затѣмъ мы видимъ, что $y = 0$, когда $x = 0$, такъ что постоянное равно 0. Отсюда уравненіе кривой есть

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{w}{T_0} x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

а это есть парабола. Затѣмъ, $\operatorname{tg}\theta = \frac{w}{T_0} x$, такъ что $\sec^2\theta$ равенъ $1 + \frac{w^2}{T_0^2} x^2$ и, такъ какъ $T = T_0 \sec\theta$, то

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{w^2}{T_0^2} x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Исходя изъ этого, можно производить всякаго рода расчеты. Такъ, если l пролетъ и D провѣсъ телеграфной проволоки, то, если бы была вычерчена вся кривая, мы бы увидѣли, что слѣдуетъ только подставить въ равенство (4) $x = {}^1/_2 l$, и $y = D$, отсюда

$$D = \frac{1}{2}\,\frac{w}{T_0}\,\frac{1}{4}\, l^2 \quad \text{или} \quad T_0 = \frac{wl^2}{8D},$$

точно также не трудно найти бо́льшія напряженія и въ другихъ точкахъ.

Въ задачѣ о видѣ однообразной цѣпи, нагруженной однимъ только собственнымъ вѣсомъ, интегрированіе не такъ легко. Я привожу его въ примѣчаніи *). Когда цѣпь на-

*) Интегрированіе, приведенное въ этомъ примѣчаніи, требуетъ знанія главы III.

Если вѣсъ части цѣпи вмѣсто wx равенъ ws, гдѣ s—длина кривой отъ 0 до P, то кривая y называется **цѣпной линіей**. Уравненіе (3) обращается въ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ws}{T_0},\ \text{или, положивъ}\ T_0=wc,\ \frac{dy}{dx}=\frac{s}{c}\ldots\ldots.(1).$$

Если δs есть длина элементарной части цѣпи, то мы видимъ, что въ предѣлѣ

$$(\delta s)^2=(\delta x)^2+(\delta y)^2,$$

такъ что

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1},$$

и отсюда

$$\frac{dy}{ds}=\frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}.$$

По интегрированіи получаемъ

$$y+c=\sqrt{c^2+s^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

причемъ постоянное при интегрированіи взято такое, при которомъ $s=0$, при $y=0$. Изъ (2) мы находимъ $s^2=y^2+2yc\ldots\ldots..(3)$ и, вставляя это въ выраженіе (1), имѣемъ

$$\frac{dx}{dy}=\frac{c}{\sqrt{y^2+2yc}},$$

интегралъ котораго есть

$$x=c\log\frac{y+c+\sqrt{y^2+2yc}}{c},$$

такъ какъ при $y=0$ $x=0$, (начало координатъ въ 0), то никакого постояннаго не нужно прибавлять. Представляя это выраженіе въ показательной формѣ, получимъ

$$ce^{x/c}=y+c+\sqrt{y^2+2yc}.$$

Переносящ члены и возвышая въ квадратъ, получимъ

$$y+c={}^1/_2c\,(e^{x/c}+e^{-x/c}).$$

столько полога, что мы можемъ принять нагрузку на нѣкоторомъ его протяженіи пропорціональной горизонтальной проекціи длины цѣпи, то будемъ имѣть параболическую форму.

39. Полезное дѣйствіе поверхности нагрѣва котла. Если 1 фунтъ газовъ въ дымогарныхъ трубкахъ при охлажденіи

Или, перемѣщая начало координатъ въ точку, находящуюся на разстояніи c ниже O. какъ точка O на черт. 12, гдѣ SP есть y' и RP есть x, имѣемъ

$$y' = {}^1/_2 c\,(e^{x/c} + e^{-x/c}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Это иногда обозначается такъ

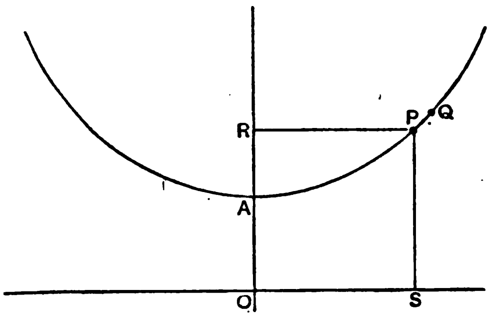
$$y' = c \cosh x/c.$$

Пользуясь (1), мы находимъ

$$s = {}^1/_2 c\,(e^{x/c} - e^{-x/c}),$$

иногда пишемъ это такъ

$$s = c \sinh x/c.$$



Черт. 12.

Замѣтимъ, что таблицы величинъ $\sinh u$ и $\cosh u$ имѣются въ печати.

Обращаясь къ первоначальному чертежу, имѣемъ, что натяженіе въ P будетъ T,

$$\frac{T}{ws} = \frac{AB}{BC} = \frac{ds}{dy}, \text{ а изъ (3), } s.\frac{ds}{dy} = y + c,$$

такъ что $\dfrac{T}{ws} = \dfrac{y+c}{s}$. Отсюда $T = w\,(y + c)$ или $T = wy'$.

до температуры воды отдаетъ количество теплоты θ, (θ можетъ быть принято пропорціональнымъ разности температуръ газовъ и воды, но это не вполнѣ правильно), мы находимъ изъ опытовъ Пекле, что количество теплоты, которое въ часъ передается съ квадратнаго фута поверхности дымогарныхъ трубокъ, приблизительно равно $m\theta^2$. Пусть $\theta=\theta_1$ у конца ея около дымовой трубы. Посмотримъ, что происходитъ въ нѣкоторой точкѣ дымогарной трубки.

Газы при движеніи отъ топки, пройдя площадь S до того мѣста, гдѣ температура θ, прошли далѣе до точки, гдѣ S становится уже $S+\delta S$ и θ становится $\theta+\delta\theta$ (въ дѣйствительности $\delta\theta$ отрицательно, какъ это легко видѣть). Положимъ, что состояніе это остается неизмѣннымъ, и въ продолженіе часа газы передаютъ черезъ площадь δS количество теплоты $m\theta^2\delta S$. Если въ теченіи часа W фунтовъ газовъ отдали на этой площади—$W\delta\theta$ теплоты, тогда

$$-W\delta\theta=m\theta^2\delta S$$

или

$$\frac{dS}{d\theta}=-\frac{W}{m}\cdot\frac{1}{\theta^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Интегрируя по θ, получимъ

$$S=\frac{W}{m}\cdot\frac{1}{\theta}+c\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

гдѣ c нѣкоторое постоянное.

Полагая $\theta=\theta_1$—температурѣ у топкѣ, гдѣ $S=0$, имѣемъ

$$0=\frac{W}{m}\cdot\frac{1}{\theta_1}+c \text{ или } c=\frac{W}{m}\frac{1}{\theta_1},$$

такъ что (2) обращается въ

$$S=\frac{W}{m}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta_1}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Это показываетъ, какъ уменьшается θ по мѣрѣ увеличенія S, считая его отъ топки, и студенту во всякомъ случаѣ стоитъ потрудиться начертить кривую, связывающую S и θ. Если, далѣе, S представляетъ полную площадь по-

верхности нагрѣва и у конца трубокъ со стороны дымовой коробки $\theta = \theta_2$, то

$$S = \frac{W}{m}\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Количество теплоты, заключающееся въ одномъ фунтѣ газовъ, у топки равно θ_1, онъ отдаетъ водѣ количество $\theta_1 - \theta_2$. Отсюда **коэффиціентъ полезнаго дѣйствія** поверхности нагрѣва можетъ быть принятъ равнымъ

$$E = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

а изъ равенства (4) слѣдуетъ, что

$$E = \frac{1}{1 + \frac{W}{\theta_1 m S}}.$$

Затѣмъ, пусть W' есть вѣсъ угля, сжигаемаго въ часъ; $W = 13\,W'$, если воздухъ поступаетъ въ количествѣ достаточномъ для полнаго сгоранія. $W =$ около $20\,W'$ въ случаѣ обыкновенной форсированной тяги; $W =$ около $26\,W'$ въ случаѣ тяги черезъ дымовую трубу. Въ этихъ случаяхъ θ_1 повидимому мѣняется не обратно пропорціонально W, какъ бы это могло казаться съ перваго взгляда; но мы не знаемъ въ точности, какъ θ_1 зависитъ отъ величины избытка поступающаго воздуха. Мы можемъ только сказать, что, если $W' : S$ есть вѣсъ угля въ часъ на 1 кв. футъ поверхности нагрѣва и мы назовемъ это w, то, повидимому, существуетъ законъ $E = \frac{1}{1 + aw}$, гдѣ a зависитъ отъ количества поступающаго въ топку воздуха. Практикой найдено, что $a = 0{\cdot}5$ для тяги съ дымовой трубой, и $0{\cdot}3$ для форсированной тяги, и эти величины даютъ вполнѣ точные результаты. Также числитель долженъ быть взятъ бо́льшимъ единицы, когда есть спеціальныя приспособленія для подогрѣванія питающей воды.

Если мы вмѣсто даннаго выше закона (потеря теплоты газами въ дымогарной трубкѣ $\propto \theta^2$), примемъ, что и бо-

лѣе вѣроятно, что потеря эта пропорціональна θ, тогда вмѣсто прежняго (1) получимъ

$$\frac{dS}{d\theta}=-\frac{W}{m}\frac{1}{\theta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

или

$$S=-\frac{W}{m}\log\theta+\text{постоянное}\ldots\ldots\ldots (2).$$

Пусть $\theta=\theta_1$ у топки, гдѣ $S=0$, тогда наше постоянное равно $\frac{W}{m}\log\theta_1$, (2) принимаетъ видъ

$$S=\frac{W}{m}\log\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Если S есть полная площадь поверхности трубки и θ_2 температура у дымовой трубы, тогда

$$S=\frac{W}{m}\log\frac{\theta_1}{\theta_2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

или

$$e^{\frac{Sm}{W}}=\frac{\Theta_1}{\Theta_2}.$$

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія

$$E=\frac{\Theta_1-\Theta_2}{\Theta_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

принимаетъ видъ

$$E=1-\frac{\Theta_2}{\Theta_1}=1-e^{-\frac{Sm}{W}}\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Или, если w есть вѣсъ топлива на кв. футъ поверхности нагрѣва, какъ и прежде, то (6) приметъ видъ

$$E=1-e^{-\frac{1}{aw}}\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

40. Работа, получающаяся при расширеніи тѣла *). Если p есть давленіе и v объемъ въ нѣкоторый моментъ тѣла, которое уже про-

*) Замѣтимъ, что, если мы вмѣсто p и v будемъ писать x и y, то выводъ этотъ представится очень легкимъ.

извело при расширеніи нѣкоторую работу W, то лучшее опредѣленіе давленія будетъ такое: $p = \frac{dW}{dv}$ .....(1) или, выражая это словами, давленіе есть величина, выражающая работу при единичномъ измѣненіи объема. Другой способъ установленія этого понятія слѣдующій. Если тѣло расширяется на объемъ δv, то увеличеніе работы будетъ δW, такъ что $p\delta v = \delta W$ или $p = \frac{\delta W}{\delta v}$, но это строго правильно только въ томъ случаѣ, когда δv неограниченно убываетъ, и такимъ образомъ (1) становится вполнѣ точнымъ. Положимъ, тѣло расширяется по закону $pv^s = c$—постоянному.....(2), слѣдовательно $p = cv^{-s}$ и это есть производная отъ W по v или, какъ мы уже писали раньше $\frac{dW}{dv} = cv^{-s}$.

Интегрируемъ это выраженіе согласно нашему правилу, получаемъ

$$W = \frac{+c}{-s+1} v^{-s+1} + C$$

гдѣ C — нѣкоторое постоянное. Чтобы найти C, предположимъ, что мы будемъ начинать счетъ W съ $v = v_1$. Стало быть $W = 0$, когда $v = v_1$. Поэтому

$$0 = \frac{c}{1-s} v_1^{1-s} + C, \text{ такъ что } C = -\frac{c}{1-s} v_1^{1-s}.$$

Внося эту величину C въ (3), имѣемъ

$$W = \frac{c}{1-s}(v^{1-s} - v_1^{1-s}) \text{ ....(4)},$$

что изображаетъ работу, полученную при расширеніи отъ v_1 до v.

Затѣмъ, если мы хотимъ знать W, когда $v = v_2$, мы имѣемъ

$$W_{12} = \frac{c}{1-s}(v_2^{\,1-s} - v_1^{1-s}) \text{ ....(5)}.$$

Этотъ результатъ можетъ быть представленъ въ другомъ видѣ. Такъ, изъ (2) мы знаемъ, что

$$c = p_1 v_1^s \text{ или } p_2 v_2^s, \text{ такъ что}$$

$$W_{12} = \frac{p_1 v_1^s}{1-s}(v_2^{\,1-s} - v_1^{1-s}) \text{ или}$$

$$W_{12} = \frac{p_1 v_1}{1-s}\left\{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-s} - 1\right\},$$

или

$$W_{12} = \frac{p_1 v_1}{s-1}\left\{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{s-1}\right\} \text{ ....(6)},$$

формула, имѣющая большое примѣненіе въ расчетахъ газовыхъ и паровыхъ машинъ.

Есть одинъ случай. въ которомъ этотъ отвѣтъ является непригоднымъ. Примѣнимъ его къ случаю, когда $s = 1$. Другими словами, найдемъ какая работа получается отъ v_1 до v_2 при расширеніи тѣла по закону $pv = c$ (это будетъ изотермическій законъ, если тѣло есть газъ).

Вы уже вѣроятно поняли, почему нашъ отвѣтъ не годится, теперь вернитесь назадъ къ уравненію

$$\frac{dW}{dv} = cv^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Вы легко убѣдитесь, когда вы станете интегрировать x^m, что при $m = -1$ общее рѣшеніе не годится. Но я уже говорилъ и полагаю, что это можно считать доказаннымъ, что интегралъ x^{-1} есть $\log x$. Итакъ интегралъ (7) есть

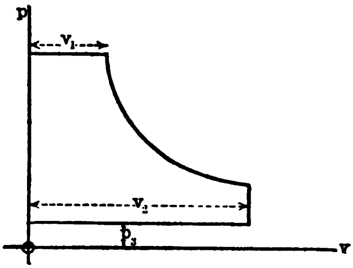
$$W = c \log v + C.$$

Поступая какъ и выше, мы находимъ, что въ этомъ частномъ случаѣ

$$W_{12} = c \log \frac{v_2}{v_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

41. Гипотетическая діаграмма паровой машины.

Пусть паръ поступаетъ въ цилиндръ при постоянномъ давленіи p_1, при чемъ объемъ его въ цилиндрѣ возрастаетъ отъ 0 до v_1. Произведенная робота равна $p_1 v_1$. Пусть далѣе паръ расширяется до объема v_2 согласно закону $pv^s = c$. Произведенная работа получится изъ (6) и (8). Пусть давленіе отработавшаго пара p_3, тогда работа, произведенная паромъ въ обратную сторону хода поршня есть $p_3 v_2$. Мы пренебрегаемъ въ этой гипотетической діаграммѣ сжатіемъ пара. Назовемъ $\frac{v_2}{v_1}$, степень расширенія, буквою r. Тогда работа netto будетъ



Черт. 13.

$$p_1 v_1 + \frac{p_1 v_1}{s-1}\left(1 - r^{1-s}\right) - p_3 v_2.$$

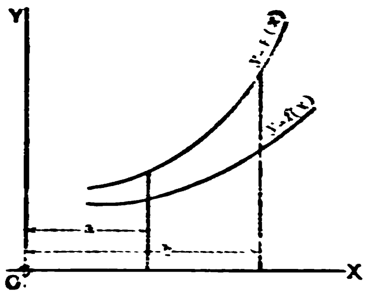
Пусть p_e будетъ рабочее давленіе, такъ что $p_e v_2$ эквивалентно приведенной выше работѣ netto (p_e измѣряется изъ дѣйствительныхъ индикаторныхъ діаграммъ, какъ среднее давленіе). Приравнивая ихъ и дѣля на v_2, имѣемъ по упрощеніи

$$p_e = p_1 \frac{1}{r} + \frac{p_1}{s-1} \cdot \frac{1}{r}(1 - r^{1-s}) - p_3 =$$

$$= \frac{p_1}{s-1}\left(\frac{s}{r} - r^{-s}\right) - p_3.$$

Въ спеціальномъ случаѣ, когда $s = 1$, мы имѣемъ $p_e = p_1 \frac{1 - \log r}{r} - p_3$, примѣняя тотъ же самый способъ.

42. Опредѣленный интегралъ. *Опредѣленіе.* Символъ $\int_b^a f(x).dx$ говоритъ намъ:—«Найдите общій интегралъ $f(x)$; внесите въ него величину a вмѣсто x, а затѣмъ b вмѣсто x и послѣдній результатъ подстановки вычтите изъ перваго» *).



Черт. 14.

* Символъ $\int_a^b \int_{f(x)}^{F(x)} u.dx\,dy$ ..... (1) говоритъ намъ, что мы должны интегрировать u (которое есть функція x и y) относительно y, принимая x за постоянное; затѣмъ должны внести вмѣсто y сначала $F(x)$, а потомъ $f(x)$ и вычесть второе изъ перваго. Этотъ результатъ слѣдуетъ проинтегрировать относительно x, въ отвѣтъ подставить b и a вмѣсто x и результатъ второй подстановки вычесть изъ первой.

I. Если $u = 1$, то $dy.dx$, очевидно, изображаетъ элементъ площади, или безконечно малый прямоугольникъ. Результатъ перваго дѣйствія даетъ интегралъ

$$\int_a^b [F(x) - f(x)]\,dx \ldots\ldots (2),$$

который нужно рѣшить.

Очевидно, что мы нашли площадь, заключенную между кривыми $y = F(x)$ и $y = f(x)$ и двумя ординатами при $x = a$ и $x = b$. На практикѣ же при нахожденіи площадей путь лучше пользуются формулой (2) (см. черт. 14).

II. Если u [illegible] вѣсъ единицы площади позолоты, покрывающей вышеупомянутую площадь, тогда $u.dx.dy$ представляетъ вѣсъ позолоты на элементарной площади $dx.dy$, а нашъ интегралъ изображаетъ вѣсъ всего золота на упомянутой площади.

Когда, вообще, берется интегралъ отъ нѣкоторой величины u, которая въ любой точкѣ есть функція x, y, z, по нѣкоторому объему, то ее пишутъ подъ тройнымъ знакомъ интеграла

$$\iiint u.dx.dy.dz,$$

а суммированіе по поверхности выражается въ видѣ

$$\iint u.dx.dy$$

Это и называютъ интеграломъ $f(x)$ между предѣлами a и b. Замѣтимъ далѣе, что произвольное постоянное, которое приходится находить въ общемъ интегралѣ, здѣсь при вычитаніи исчезаетъ.

Интегрированіе въ предѣлахъ мы будемъ изображать слѣдующимъ образомъ:

Примѣръ, найти $\int_b^a x^2 . dx$. Общій интегралъ есть $\frac{1}{3}x^3$, и мы пишемъ

$$\int_b^a x^2 . dx = \Big[_b^a \tfrac{1}{3}x^3 \Big] = \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{3}b^3.$$

Символически. Если $F(x)$ есть общій интегралъ $f(x)$, тогда

$$\int_b^a f(x) . dx = \Big[_b^a F(x) \Big] = F(a) - F(b).$$

Замѣтимъ, какъ это и слѣдуетъ изъ нашего опредѣленія, что

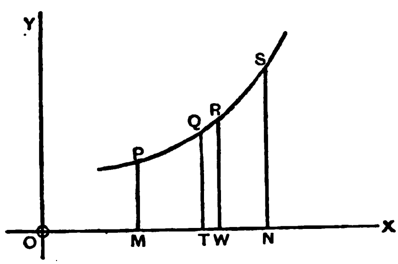
$$\int_b^a f(x) . dx = -\int_a^b f(x) . dx,$$

а также, что

$$\int_b^a f(x) . dx = \int_b^c f(x) . dx + \int_c^a f(x) . dx.$$

43. Площадь кривой. Пусть y кривой извѣстенъ, какъ нѣкоторая функція x, и пусть PS будетъ кривая линія. Требуется найти площадь $MPQT$.

Если площадь $MPQT$ назовемъ A, $OT = x$, $QT = y$, $OW = x + \delta x$, $WR = y + \delta y$ и площадь $MPRW$ будетъ $A + \delta A$, тогда δA=площ. $TQRW$.



Черт. 15.

Нѣкоторые авторы пользуются символомъ $\int\int v . dS$, чтобы изо-

Если бы короткій отрѣзокъ QR былъ прямымъ, то

$$\delta A = {}^1/_2\delta x\,(TQ + RW) = \delta x\,(y + {}^1/_2\delta y).$$

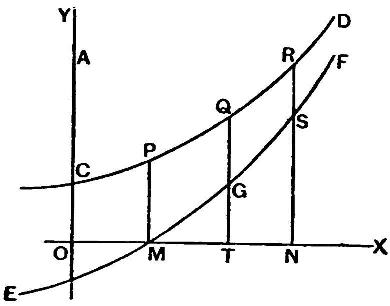
Итакъ $\frac{\delta A}{\delta x} = y + {}^1/_2\delta y$, а такъ какъ δx безконечно убываетъ, то въ предѣлѣ $\frac{dA}{dx} = y$ . . . . (1).

Отсюда A есть такая функція x, что y есть ея производная, или A есть интегралъ y.

На чертежѣ 16 CQD есть кривая $y = a + bx^2$, и $EMGF$ есть кривая, представляющая

$$A = C + ax + {}^1/_3bx^3,$$

такъ что A есть интегралъ y. Въ какомъ смыслѣ A представляетъ *площадь* кривой CD? Ордината кривой A, GT, представляетъ въ томъ или другомъ масштабѣ площадь кривой y $MPQT$ отъ нѣкоторой начальной ординаты PM.



Черт. 16.

Ордината TQ представляетъ въ масштабѣ уклонъ кривой EF въ точкѣ G. Замѣтимъ, между прочимъ, что, если мы уменьшимъ или увеличимъ всѣ ординаты кривой A на нѣкоторую величину, то мы не измѣнимъ никогда ея уклона, и данное намъ y говоритъ только объ уклонѣ кривой A. Такимъ образомъ, по данной кривой y мы можемъ найти сколько угодно кривыхъ A. Мы получаемъ только одну искомую кривую, ставя себѣ условіе считать площадь отъ

бразить вообще суммированіе v по площади и $\int w.ds$, чтобы изобразить суммированіе w по линіи, или то, что называется часто линейнымъ интеграломъ w. Линейный интегралъ силы тяги, приложенной къ вагону, изображаетъ произведенную работу. Поверхностный интегралъ нормальной скорости струи по нѣкоторой площади даетъ полный объемъ воды, протекающей въ секунду. Инженеры постоянно встрѣчаются въ своей практикѣ съ линейными, поверхностными и объемными интегралами, и здѣсь нѣтъ ничего для нихъ новаго.

нѣкоторой опредѣленной ординаты, положимъ PM. Итакъ пусть на чер. 16 общій интегралъ y есть $F(x)+c$. Если мы возьмемъ значеніе $x=OM$, то мы получимъ что площадь отъ нѣкоторой неизвѣстной начальной ординаты до MP равна $F(OM)+c$.

Принимая $x=ON$, мы имѣемъ, что площадь отъ нѣкоторой неизвѣстной начальной ординаты до NR равна $F(ON)+c$. Отсюда площадь между ординатами MP и NR есть просто разность $F(ON)-F(OM)$, причемъ постоянное исчезаетъ.

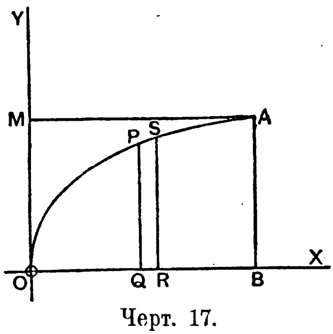
Итакъ символъ $\int_{OM}^{ON} y\,.\,dx$ имѣетъ слѣдующее значеніе: нужно проинтегрировать y; внести въ интегралъ вмѣсто x сначала ON, а затѣмъ OM и результатъ послѣдней подстановки вычесть изъ первой. Мы видимъ такимъ образомъ, что результатомъ такого дѣйствія является площадь кривой между ординатой при $x=OM$ и ординатой при $x=ON$.

Если y и x представляютъ какія нибудь величины, и нужно начертить кривую съ y какъ ординатами и x, какъ абсциссами, тогда $\int y\,.\,dx$ представляется въ видѣ площади кривой, и мы знаемъ теперь, какъ поступить, когда мы желаемъ найти сумму такихъ отдѣльныхъ элементовъ, какъ $y\,.\,\delta x$, между предѣлами $x=b$ и $x=a$, когда δx предполагается безконечно убывающимъ.

Примѣръ. Найти площадь, заключенную между параболической кривой OA, ординатой AB и осью OB. Пусть уравненіе кривой будетъ

$$y=ax^{1/2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(1),$$

гдѣ $PQ=y$ и $OQ=x$. Пусть $QR=\delta x$.



Черт. 17.

Площадь элемента $PQRS$, по мѣрѣ безконечнаго убыванія δx, все болѣе и болѣе приближается къ величинѣ

$$ax^{1/2}\,.\,\delta x;$$

или, иначе вся площадь равна $\int_{0}^{OB} ax^{1/2}\,.\,dx$, который, въ свою очередь равенъ

$$a\left[\begin{matrix}OB\\ O\end{matrix}{}^2/_3 x^{1^1/_2}\right] = {}^2/_3\, a\,.\,OB^{1^1/_2} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Далѣе, какъ зависитъ a отъ AB и OB? Когда $y = AB$, $x = OB$. Отсюда изъ (1)

$$AB = a\,.\,OB^{^1/_2},\ \text{такъ что}\ a = \frac{AB}{OB^{^1/_2}}$$

$$\text{Поэтому площадь} = {}^2/_3 \frac{AB}{OB^{^1/_2}} OB^{^2/_3} = {}^2/_3 AB\,.\,OB,$$

что составляетъ $^2/_3$ площади прямоугольника $OMAB$.

Замѣтимъ, что площадь весьма плоскаго кругового сегмента подобна сегменту параболы, когда OB очень мало сравнительно съ BA.

Упражненіе 1. Найти площадь между кривой $y = mx^{-n}$ и двумя ординатами, при $x = a$ и $x = b$.

Отвѣтъ:

$$\int_a^b mx^{-n}\,.\,dx = \frac{m}{1-n}\left[\begin{matrix}b\\ a\end{matrix} x^{1-n}\right] = \frac{m}{1-n}(b^{1-n} - a^{1-n}).$$

Замѣтимъ (какъ и въ пунктѣ 40), что этотъ пріемъ не годится, когда $n = 1$, что бываетъ въ равносторонней гиперболѣ.

Въ этомъ случаѣ отвѣтъ получается слѣдующій:

$$m\int_a^b \frac{1}{x}\,.\,dx = m\left[\begin{matrix}b\\ a\end{matrix} \log\ x\right] = m\ \log\frac{b}{a}.$$

Если уравненіе кривой будетъ

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4,$$

площадь равна

$$A = ax + {}^1/_2 bx^2 + {}^1/_3 cx^3 + {}^1/_4 ex^4 + {}^1/_5 fx^5.$$

Здѣсь площадь взята отъ ординаты, гдѣ $x = 0$, такъ какъ $A = 0$ при $x = 0$. Мы можемъ сразу найти площадь между какими нибудь двумя данными ординатами.

Упражненіе 2. Найти площадь кривой $y = a\sqrt[3]{x}$ между ординатами при $x = \alpha$ и $x = \beta$.

$$a\int_\alpha^\beta x^{^1/_3}\,.\,dx = a\left[\begin{matrix}\beta\\ \alpha\end{matrix} {}^3/_4 x^{^4/_3}\right] = \frac{3a}{4}(\beta^{^4/_3} - \alpha^{^4/_3}).$$

Упражненіе 3. Найти площадь кривой $yx^2 = a$ между ординатами при $x = \alpha$ и $x = \beta$.

Отвѣтъ: $a \int_{\alpha}^{\beta} x^{-2}.dx = a \left[{}_{\alpha}^{\beta} - x^{-1} \right] = a\ (\alpha^{-1} - \beta^{-1})$.

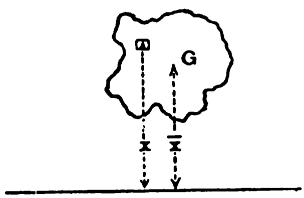
44. Работа при расширеніи тѣла. Если мы пользуемся опредѣленными интегралами, то эту работу мы получимъ нѣсколько скорѣе, чѣмъ въ пунктѣ 40. Ибо, если $p = cv^{-s}$, то работа, произведенная объемами v_1 до v_2, равна

$$\int_{v_1}^{v_2} cv^{-s}.dv, \text{ или } c\left[{}_{v_1}^{v_2} \frac{1}{1-s} v^{1-s} \right], \text{ или } \frac{c}{1-s}(v_2^{1-s} - v_1^{1-s}).$$

Этотъ методъ непригоденъ, когда $s = 1$, и тогда интегралъ представится въ такомъ видѣ

$$c\left[{}_{v_1}^{v_2} \log\ v \right] = c\ \log \frac{v_2}{v_1}.$$

45. Центръ тяжести. Только немногія тѣла имѣютъ центры тяжести. Мы обыкновенно подъ этимъ подразумѣваемъ центръ массы, или центръ площади.



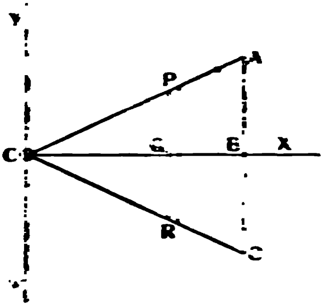
Черт. 18.

Если каждый небольшой элементъ **массы** умножить на разстояніе его отъ нѣкоторой плоскости и результаты сложить вмѣстѣ, то эта сумма равна всей массѣ тѣла, умноженной на разстояніе $\bar{x}$ центра тяжести ея отъ той же плоскости. Выражаясь алгебраически, имѣемъ

$$\Sigma mx = \bar{x}\Sigma m.$$

Если каждый небольшой элементъ **плоской фигуры**, подобной указанной на чер. 18, умножить на его разстояніе отъ нѣкоторой линіи, лежащей въ той же плоскости, и результаты сложить вмѣстѣ, то сумма ихъ равна полной площади, умноженной на разстояніе $\bar{x}$ центра тяжести ея отъ той же линіи. Выражаясь алгебраически, имѣемъ $\Sigma ax = \bar{x}\Sigma a$.

Примѣръ. Найти центръ тяжести прямого конуса. Онъ находится, очевидно, на оси OB конуса. Пусть линія OA вращается около оси OX; она образуетъ конусъ. Разсмотримъ круглый слой PQR толщиною δx. Пусть $OQ = x$, тогда PQ или



Черт. [illegible]

$$y = \frac{AB}{OB} x.$$

Масса слоя PR, умноженная на разстояніе отъ O до ея центра равна суммѣ массъ отдѣльныхъ элементовъ, умноженныхъ на разстоянія ихъ центровъ отъ плоскости YOY'. Объемъ слоя PR равенъ [illegible] πy^2, умноженной на толщину δx; умножая его на ρ — массу единицы объема, получаемъ его массу равною $\pi\rho y^2 \delta x$. [illegible] все меньше и меньше разстояніе его центра тяжести отъ O все болѣе и болѣе приближается къ x. Такимъ образомъ намъ нужно найти сумму всѣхъ такихъ членовъ, какъ $\pi\rho y^2 \delta x$ и раздѣлить ее на всю массу ($\frac{1}{3}\pi\rho . AB^2 . OB$) умноженной на $\bar{x}$ — разстояніе ея центра тяжести отъ O. Подставляя величину y^2 черезъ x, имѣемъ

$$\int_0^{OB} \pi\rho \frac{AB^2}{OB^2} x^3 dx \text{ равняется } \frac{1}{3}\pi\rho AB^2 . OB . \bar{x}.$$

Далѣе $\int_0^{OB} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{OB} = \frac{1}{4} OB^4$.

И такъ будетъ $\pi\rho \frac{AB^2}{OB^2} \cdot \frac{1}{4} OB^4 = \frac{1}{3}\pi\rho AB^2 . OB . \bar{x}$.

Откуда $\bar{x} = \frac{3}{4} OB$, т. е. центръ тяжести лежитъ на оси въ разстояніи равномъ $\frac{3}{4}$ высоты конуса, считая отъ вершины.

46. Предположимъ, что требуется [illegible] найти объемъ [illegible]

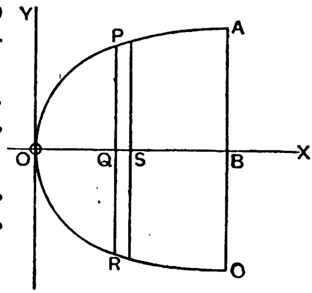
Объемъ слоя PR есть $\pi . y^2 . \delta x$, а полный объемъ есть

$$\int_0^{OB} \pi y^2 . dx = \int_0^{OB} \pi \left(\frac{AB}{OB}\right)^2 x^2 . dx = \pi \left(\frac{AB}{OB}\right)^2 \left[{}_0^{OB}\, {}^1/_3 x^3\right]$$

$$= \pi \left(\frac{AB}{OB}\right)^2 {}^1/_3 . OB^3 = {}^1/_3 \pi . AB^2 . OB,$$

или $^1/_3$ объема цилиндра, имѣющаго одинаковое съ нимъ основаніе AC и высоту OB. Если бы мы взяли $y = ax$, то выводъ былъ бы еще проще.

Примѣръ. **Найти объемъ и центръ массы** однороднаго тѣла (масса единицы объема его равна m), ограниченнаго поверхностью **параболоида вращенія.**



Черт. 20.

Пусть $PQ = y$, $OQ = x$, $QS = \delta x$, а уравненіе кривой OPA имѣетъ видъ: $y = ax^{1/2}$ . . . . (1).

Объемъ слоя PSR равенъ $\pi y^2 . \delta x$, а потому полный объемъ равенъ $\int_0^{OB} \pi . a^2 x . dx$ или

$$^1/_2 \pi a^2 . OB^2 \quad . \; . \; . \; (2).$$

Теперь, что же представляетъ собою a? Когда

$$y = AB,\ x = OB,$$

такъ что изъ (1) имѣемъ $AB = a . OB^{1/2}$, отсюда $a = \dfrac{AB}{OB^{1/2}}$.

Итакъ объемъ равенъ $^1/_2 \pi \dfrac{AB^2}{OB} OB^2$, или

$$^1/_2 \pi . AB^2 . OB \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

То есть, онъ равенъ половинѣ площади круга AC, умноженной на высоту OB. Итакъ объемъ параболоида вращенія равенъ половинѣ объема цилиндра, имѣющаго то же основаніе и высоту. (Объемы цилиндра, параболоида вращенія и конуса, имѣющихъ одинаковое основаніе и высоту, относятся какъ $1 : {}^1/_2 : {}^1/_3$).

Переходимъ далѣе къ центру массы параболоида. Онъ, очевидно, лежитъ на его оси. Находимъ

$$\int_0^{OB} m\pi . y^2 x . dx, \text{ или}$$

$$\int m\pi x . a^2 x . dx = m\pi a^2 \int x^2 . dx, \text{ или}$$

$m\pi a^2 . \left[{}^1/_3 x^3\right]_0^{OB}$ равный ${}^1/_3 m\pi a^2 . OB^3$. Подставляя вмѣсто a, какъ и прежде, его значеніе $\frac{AB^2}{OB}$, мы получаемъ интегралъ равнымъ ${}^1/_3 m\pi . OB^2 . AB^2$. Этотъ интегралъ равенъ всей массѣ, умноженной на $\bar{x}$, разстояніе центра массы отъ вершины, или выраженію $m{}^1/_2\pi . AB^2 . OB . \bar{x}$, такъ что $\bar{x} = {}^2/_3 OB$. Итакъ центръ массы параболоида вращенія лежитъ на его оси въ разстояніи равномъ ${}^2/_3$ ея длины, считая отъ вершины.

Примѣръ. Кривая $y = ax^n$ вращается около оси x; найти объемъ, ограниченный образующейся **поверхностью вращенія** въ предѣлахъ $x = 0$ и $x = b$.

Объемъ, ограниченный любой поверхностью вращенія, получается путемъ интегрированія выраженія $\pi y^2 . dx$. Такимъ образомъ нашъ отвѣтъ будетъ

$$\pi \int_0^b a^2 x^{2n} . dx = \frac{\pi a^2}{2n+1}\left[x^{2n+1}\right]_0^b = \frac{\pi a^2}{2n+1} b^{2n+1}.$$

Найдемъ центръ массы, если m есть масса единицы объема. Для любого тѣла вращенія мы должны интегрировать $m . x\pi y^2 . dx$ и дѣлить на полную массу тѣла, которая есть интегралъ выраженія $m\pi y^2 . dx$. Если m постоянное, то мы имѣемъ

$$m\pi \int_0^b x a^2 x^{2n} . dx = m\pi a^2 \int_0^b x^{2n+1} dx =$$

$$= \frac{m\pi a^2}{2n+2}\left[x^{2n+2}\right]_0^b = \frac{m\pi a^2}{2n+2} b^{2n+2},$$

а полная масса равна $\frac{m\pi a^2}{2n+1} b^{2n+1}$, такъ что $\bar{x} =$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} b.$$

Предположимъ, что m не постоянное, а слѣдуетъ закону

$$m = m_0 + cx^s.$$

Найдемъ массу и центръ массы вышеприведеннаго тѣла для этого случая. Нашъ первый интегралъ принимаетъ видъ

$$\pi \int (m_0 x + cx^{s+1})\, a^2 x^{2n} . dx, \quad \text{или} \quad a^2\pi \int (m_0 x^{2n+1} + cx^{2n+s+1})\, dx, \quad \text{или}$$

$$a^2\pi \left[\frac{m_0}{2n+2} x^{2n+2} + \frac{c}{2n+s+2} x^{2n+s+2} \right]_0^b \quad . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Масса равна $a^2\pi \int_0^b (m_0 + cx^s)\, x^{2n} . dx$

$$\text{или} \qquad a^2\pi \left[\frac{m_0}{2n+1} x^{2n+1} + \frac{c}{2n+s+1} x^{2n+s+1} \right] . \; (2).$$

Подставляя b вмѣсто x въ обоихъ выраженіяхъ и дѣля (1) на (2), находимъ $\bar{x}$.

Способный студентъ можетъ самъ составить себѣ много упражненій подобнаго рода, заключающихъ интегрированіе x^n.

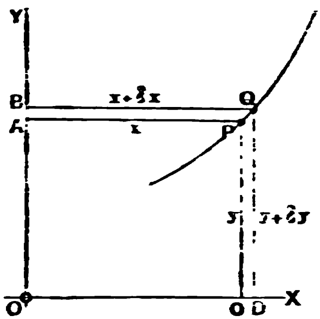
Дуга эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается около оси x'овъ, найти объемъ части **эллипсоида вращенія** между двумя плоскостями $x = 0$ и $x = c$. Здѣсь $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Интегралъ πy^2 равенъ

$$\pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - {}^1\!/_3 x^3 \right]_0^c = \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 c - {}^1\!/_3 c^3).$$

Объемъ полнаго эллипсоида равенъ $\frac{4\pi}{3} b^2 a$, а шара $\frac{4\pi}{3} a^3$.

47. Длины кривыхъ. На чер. 21 координаты точки P суть x и y, а точки Q $x + \delta x$ и $y + \delta y$. Если мы длину кривой отъ нѣкотораго опредѣленнаго мѣста до точки P

обозначимъ черезъ s, а длину PQ черезъ δs, то $(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2$ при условіи, что δx безконечно убываетъ, такъ что



Черт. 21.

$$\frac{\delta s}{\delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2},$$

или въ предѣлѣ

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Чтобы найти величину s, нужно только интегрировать выраженіе $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Къ сожалѣнію мы пока вполнѣ изучили только $\int x^n.dx$, который не имѣетъ большого примѣненія въ упражненіяхъ на длины кривыхъ.

Примѣръ. Найти длину кривой $y=a-bx$ (прямая линія) между предѣлами $x=0$ и $x=c$.

Здѣсь $\frac{dy}{dx}=b$ и $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+b^2}$,

$$s=\int_0^c \frac{ds}{dx}.dx=\int_0^c \sqrt{1+b^2}.dx=\left[x\sqrt{1+b^2}\right]_0^c=$$
$$=c\sqrt{1+b^2}.$$

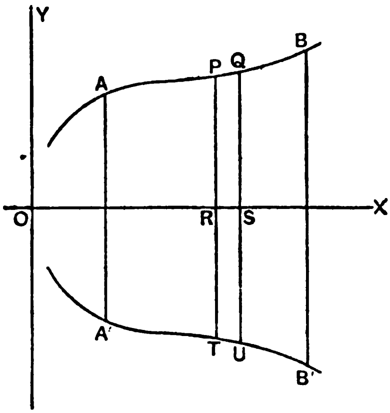
Упражненіе. Имѣемъ кривую, уклонъ которой равенъ $\sqrt{a^2x^n-1}$; найти выраженіе для ея длины. Отвѣтъ:

$$s=\frac{2a}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}.$$

Другія упражненія на длины кривыхъ будутъ приведены дальше.

48. Площади поверхностей вращенія. Когда кривая APB, вращаясь около оси OX, описываетъ поверхность враще-

нія, мы видѣли, что объемъ между предѣлами ACA' и BDB' равенъ интегралу πy^2 относительно x между предѣлами OC и OD.



Черт. 22.

Далѣе, элементарной площадью поверхности является та, которая образуется вращеніемъ элементарной длины PQ или δs и въ предѣлѣ равна $2\pi y.ds$. Итакъ мы имѣемъ дѣло съ интеграломъ $\int_{OC}^{OD} 2\pi y \cdot \frac{ds}{dx} \cdot dx$, и, если законъ кривой извѣстенъ, то $y \cdot \frac{ds}{dx}$ или $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ можетъ быть выражено черезъ x.

Примѣръ. Линія $y = a + bx$ вращается около оси x; найти поверхность конуса между предѣлами $x = 0$ и $x = c$.

$\frac{dy}{dx} = b$, такъ что площадь равна $2\pi \int_0^c y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx$

$$= 2\pi\sqrt{1+b^2}\int_0^c (a+bx)\,dx = 2\pi\sqrt{1+b^2}\Big[ax + {}^1/_2 bx^2\Big]_0^c$$

$$= 2\pi\sqrt{1+b^2}\,(ac + {}^1/_2 bc^2).$$

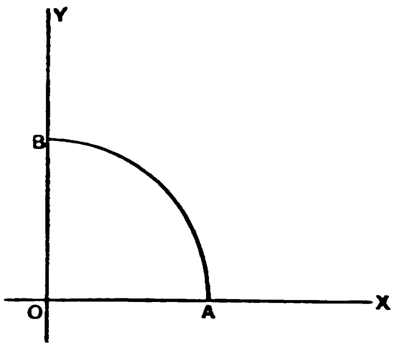
Задача нахожденія площади сферической поверхности напечатана здѣсь мелкимъ шрифтомъ, такъ какъ предполагается, что начинающій умѣетъ только дифференцировать x^n, а для этой задачи требуется знать, что производная отъ y^2 по x равна производной по y, умноженной на $\frac{dy}{dx}$ или равна $2y \cdot \frac{dy}{dx}$. Конечно, если студентъ подумаетъ, то безъ особеннаго труда пойметъ, въ чемъ заключается суть дѣла, но онъ можетъ найти эту площадь слѣдующимъ обра-

зомъ. Пусть V есть объемъ шара радiуса r, $V=\frac{4\pi}{3}r^3$, пунк. 46. Пусть $V+\delta V$ есть объемъ шара радiуса $r+\delta r$, тогда

$$\delta V=\delta r\,.\,\frac{dV}{dr}=\delta r\,(4\pi r^2).$$

что справедливо только при безконечномъ убыванiи δr. Далѣе, если S представляетъ поверхность шарового слоя, толщиною δr, то объемъ его равенъ $\delta r\,.\,S$. Отсюда $\delta r\,.\,S=\delta r\,.\,4\pi r^2$, и площадь шаровой поверхности равна $4\pi r^2$.

Примѣръ. Найти площадь шаровой поверхности. Представимъ себѣ, что квадрантъ круга AB радiуса a, чер. 23,



Черт. 23.

вращается около оси OX, и возьмемъ вдвойнѣ получаемую площадь. Выраженiе площади таково:

$$4\pi\int_0^a y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Въ кругѣ $x^2+y^2=a^2$, или $y=\sqrt{a^2-x^2}$,

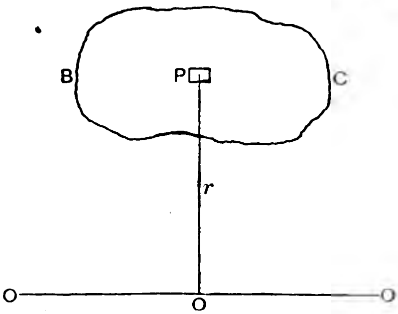
$$2x+2y\,.\,\frac{dy}{dx}=0, \text{ или } \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Отсюда, такъ какъ $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{x^2}{y^2}=\frac{a^2}{y^2}$, то

$$4\pi\int_0^a y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx=4\pi\int_0^a a\,.\,dx=4\pi\Big[ax\Big]_0^a=4\pi a^2.$$

49. Если каждую элементарную часть кривой умножить на x, ея разстояніе отъ плоскости (если кривая вся лежитъ въ одной плоскости, то за x можетъ быть взято разстояніе отъ прямой линіи, лежащей въ этой плоскости) и сумму эту раздѣлить на полную длину кривой, то мы получимъ $\bar{x}$, разстояніе центра кривой, или, какъ это иногда называется, центра тяжести кривой. Замѣтимъ, что далеко не всегда совпадаютъ центры тяжести площади и ограничивающей ее кривой.

Теоремы Гульдена. I. Объемъ кольца. Положимъ, что BC, нѣкоторая плоская фигура, черт. 24, вращаясь около оси OO, образуетъ кольцо. Объемъ этого кольца равенъ площади BC, умноженной на окружность круга, проходящаго черезъ центръ площади BC.



Черт. 24.

Представимъ себѣ весьма малый элементъ площади a около точки P на разстояніи r отъ оси. Объемъ элементарнаго кольца, образованнаго вращеніемъ этого элемента равенъ $a \cdot 2\pi r$, а объемъ всего кольца представляетъ сумму всѣхъ такихъ членовъ, или $V = 2\pi \Sigma ar$. Но $\Sigma ar = \bar{r} A$, если A есть полная площадь BC. Студентъ долженъ самъ выразить это словами; $\bar{r}$ обозначаетъ r центра площади. Итакъ $V = 2\pi \bar{r} \times A$, что и требовалось доказать.

II. Площадь кольца. Площадь поверхности кольца равна длинѣ периметра, или ограничивающей площадь BC кривой, умноженной на окружность круга, проходящаго черезъ центръ тяжести ограничивающей кривой.

Представимъ себѣ, что элементарный отрѣзокъ ограничивающей кривой, положимъ δs, находится на разстояніи r отъ оси; вращаясь, онъ образуетъ поверхность $2\pi r \times \delta s$. Отсюда полная площадь равна $2\pi \Sigma \delta s \cdot r$. Но $\Sigma \delta s \cdot r = \bar{r} \times s$, если $\bar{r}$ есть разстояніе отъ оси центра тяжести

ограничивающей кривой, а s — полная ея длина. Итакъ полная площадь кольца равна $2\pi\bar{r} \times s$.

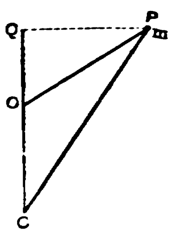
Примѣръ. **Найти площадь якорнаго кольца, сѣченіе котораго есть кругъ радіуса a, при чемъ центръ этого круга лежитъ на разстояніи R отъ оси. Отвѣтъ: периметръ сѣченія равенъ $2\pi a$, а окружность круга, описаннаго его центромъ, равна $2\pi R$, отсюда площадь равна $4\pi^2 aR$.**

Упражненіе. Найти объемъ и площадь обода маховаго колеса, при чемъ средній радіусъ его равенъ 10 фут., а поперечное сѣченіе представляетъ квадратъ, сторона котораго равна 1·3 фут. Отвѣтъ:

Объемъ $= (1{\cdot}3)^2 \times 2\pi \times 10$; Площадь $= 4 \times 1{\cdot}3 \times 2\pi \times 10$.

50. Если каждый небольшой элементъ массы умножить на квадратъ его разстоянія отъ нѣкоторой оси и полученныя произведенія сложить, то мы получимъ то, что называется **моментомъ инерціи всей массы** относительно этой оси.

Легко доказать, что моментъ инерціи относительно какой нибудь оси равенъ моменту инерціи относительно оси ей параллельной и проходящей черезъ центръ тяжести, сложенному съ произведеніемъ всей массы на квадратъ разстоянія между осями. Дѣйствительно, пусть плоскость бумаги составляетъ прямой уголъ съ осями. Пусть элементъ массы m, сосредоточенный около точки P, лежитъ въ плоскости бумаги. Положимъ, что O будетъ ось, проходящая черезъ центръ тяжести, а O' другая, ей параллельная. Намъ нужно найти сумму членовъ подобныхъ $m\,.\,(O'P)^2$.



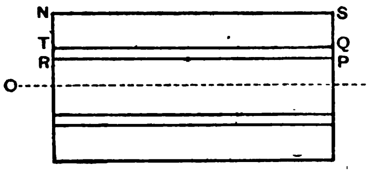
Черт. 25.

Но $(O'P)^2 = (O'O)^2 + OP^2 - 2\,.\,OO'\,.\,OQ$, гдѣ Q есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ P на OO', плоскость, въ которой лежатъ обѣ оси. Далѣе, обозначимъ $\Sigma m\,.\,(O'P)^2$ черезъ I, а $\Sigma m\,.\,OP^2$, моментъ инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести, черезъ I_0; тогда $I = (O'O)^2\Sigma m + I_0 + -2\,.\,OO'\,.\,\Sigma m\,.\,OQ$. Но $\Sigma m\,.\,OQ$ обозначаетъ, что каждый элементъ массы m умножается на разстояніе его отъ пло-

скости бумаги, и эта сумма должна быть равна 0 по пунк. 45. Итакъ, предложеніе доказано. Обозначая Σm, полную массу, черезъ M; имѣемъ

$$I = I_0 + M \cdot (O'O)^2.$$

Найдемъ **моментъ инерціи круглаго цилиндра** длиною l относительно его оси. Пусть черт. 26 изображаетъ сѣченіе его по оси OO. Разсмотримъ элементарное кольцо, показанное въ сѣченіи $TQPR$ съ внутреннимъ радіусомъ r и внѣшнимъ $r + \delta r$. Площадь сѣченія равна $l \cdot \delta r$, такъ что объемъ



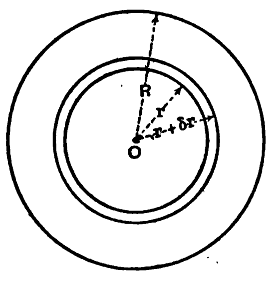
Черт. 26.

кольца равенъ $2\pi r \cdot l \cdot \delta r$, а его масса $m 2\pi r l \cdot \delta r$. Моментъ инерціи его относительно OO равенъ $2\pi m l \cdot r^3 \cdot dr$. Интегралъ этого выраженія между предѣлами $r = R$—внѣшнему радіусу цилиндра и $r = 0$ представитъ моментъ инерціи всего цилиндра, а именно, $I_0 = {}^1/_2 \pi m l R^4$, а такъ какъ полная масса цилиндра $M = m l \pi R^2$, то $I_0 = \frac{MR^2}{2}$. Если мы назовемъ **радіусомъ инерціи** k такое, что $I_0 = Mk^2$, то $k^2 = {}^1/_2 R^2$ или $k = \frac{1}{\sqrt{2}} R$.

Моментъ инерціи относительно оси NS равенъ

$$I = I_0 + MR^2 = {}^3/_2 MR^2,$$

такъ что радіусъ инерціи относительно NS равенъ $R \sqrt{{}^3/_2}$.

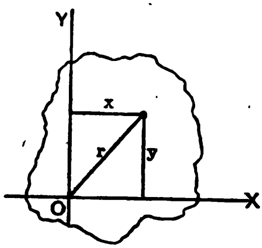


Черт. 27.

Моментъ инерціи **круга относительно его центра**. Чер. 27. Разсмотримъ кольцевую площадь между кругами радіуса r и $r + \delta r$. При безконечномъ убываніи δr эта площадь равна $2\pi r \cdot \delta r$. Моментъ инерціи ея равенъ $2\pi r^3 \cdot \delta r$, а интегралъ этого выраженія между предѣлами 0 и R равенъ ${}^1/_2 \pi R^4$, гдѣ R — радіусъ круга.

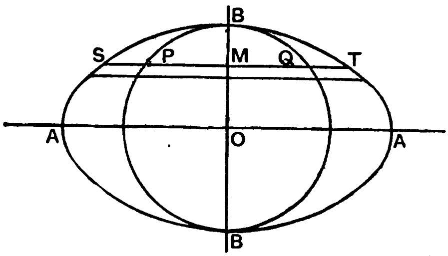
Квадратъ радіуса инерціи равенъ $^1/_2\pi R^4$: площадь $= \frac{R^2}{2}$.

Черезъ нѣкоторую точку O проведемъ двѣ линіи OX и OY, направленныя подъ прямымъ угломъ одна къ другой. Пусть элементарная площадь a будетъ на разстояніи x отъ одной линіи и y отъ другой на разстояніи r отъ O. Замѣтимъ, что $ax^2 + ay^2 = ar^2$, такъ что, если моменты инерціи всей площади относительно этихъ двухъ линій сложить вмѣстѣ, то сумма есть моментъ инерціи относительно точки O. Отсюда моментъ инерціи круга относительно діаметра есть половина вышеприведеннаго или $^1/_4\pi R^4$. Квадратъ радіуса инерціи равенъ $^1/_4 R^2$.



Черт. 28.

Моментъ инерціи эллипса относительно главнаго діаметра AOA. Пусть $OA = a$, $OB = b$.



Черт. 29.

Моментъ инерціи каждой полоски длины ST равенъ $\frac{a}{b}$ разъ взятому моменту инерціи каждой полоски PQ круга, такъ какъ онѣ находятся на одинаковомъ разстояніи отъ AOA и $\frac{MT}{MQ} = \frac{a}{b}$. Послѣднее отношеніе выражаетъ хорошо извѣстное всѣмъ инженерамъ свойство эллипса и круга. Но моментъ инерціи круга радіуса b относительно AOA ра-

венъ $^1/_4\pi b^4$, такъ что моментъ инерціи эллипса относительно AOA равенъ $^1/_4\pi b^3 a$. Подобнымъ же образомъ моментъ инерціи относительно BOB равенъ $^1/_4\pi a^3 b$.

Вышеприведенный способъ представляетъ собою математическую уловку, требующую смѣтливости, и въ обыденной инженерной работѣ онъ можетъ оказаться непрактичнымъ; онъ приведенъ здѣсь, потому что мы еще не познакомились съ тѣмъ интеграломъ, который нуженъ здѣсь при прямомъ ходѣ работы. Интегралъ этотъ очевидно будетъ такой. Площадь полоски длиною ST и шириною δy равна $2x\,.\,\delta y$. Уравненіе эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, такъ что

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

Поэтому $2\int_0^b y^2\,.\,2x\,.\,dy$ или $4\frac{a}{b}\int_0^b y^2\sqrt{b^2-y^2}\,.\,dy=I$.

Студентъ встрѣтитъ это въ видѣ примѣра въ III главѣ.

51. Моментъ инерціи обода маховаго колеса. Если ободъ маховаго колеса имѣетъ видъ пустотѣлаго цилиндра шириною l, причемъ его внутренній и внѣшній радіусы R_1 и R_2, то моментъ инерціи его $2\pi ml\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$ или $2\pi ml\left[\frac{R^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2}=$ $=\frac{1}{2}\pi ml(R_2^4-R_1^4)$. Масса его будетъ $\pi(R_2^2-R_1^2)lm=M$, такъ что $I=\frac{1}{2}(R_2^2+R_1^2)M$. Радіусъ инерціи равенъ $\sqrt{\frac{1}{2}(R_2^2+R_1^2)}$. Обыкновенно, при подсчетѣ момента инерціи обода маховика принимаютъ, что вся его масса сосредоточена на разстояніи средняго радіуса или $\frac{R_1+R_2}{2}$ отъ центра. Моментъ инерціи, вычисленный при этомъ предположеніи, относится къ истинному моменту инерціи, какъ $\frac{(R_2+R_1)^2}{2(R_2^2+R_1^2)}$. Такимъ образомъ, если $R_2=R+a$ и $R_1=R-a$, то приблизительное I относится къ истинному, какъ $1:\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)$, и если a мало, то это отношеніе при-

$$\int_0^{OB} m\pi . y^2 x . dx, \text{ или}$$

$$\int m\pi x . a^2 x . dx = m\pi a^2 \int x^2 . dx, \text{ или}$$

$m\pi a^2 . \left[{}_0^{OB}\, {}^1/_3 x^3\right]$ равный ${}^1/_3 m\pi a^2 . OB^3$. Подставляя вмѣсто a, какъ и прежде, его значеніе $\frac{AB^2}{OB}$; мы получаемъ интегралъ равнымъ ${}^1/_3 m\pi . OB^2 . AB^2$. Этотъ интегралъ равенъ всей массѣ, умноженной на $\overline{x}$, разстояніе центра массы отъ вершины, или выраженію $m^1/_2\pi . AB^2 . OB . \overline{x}$, такъ что $\overline{x} = {}^2/_3 OB$. Итакъ центръ массы параболоида вращенія лежитъ на его оси въ разстояніи равномъ ${}^2/_3$ ея длины, считая отъ вершины.

Примѣръ. Кривая $y = ax^n$ вращается около оси x; найти объемъ, ограниченный образующейся **поверхностью вращенія** въ предѣлахъ $x = 0$ и $x = b$.

Объемъ, ограниченный любой поверхностью вращенія, получается путемъ интегрированія выраженія $\pi y^2 . dx$. Такимъ образомъ нашъ отвѣтъ будетъ

$$\pi \int_0^b a^2 x^{2n} . dx = \frac{\pi a^2}{2n+1} \left[{}_0^b x^{2n+1}\right] = \frac{\pi a^2}{2n+1} b^{2n+1}.$$

Найдемъ центръ массы, если m есть масса единицы объема. Для любого тѣла вращенія мы должны интегрировать $m . x\pi y^2 . dx$ и дѣлить на полную массу тѣла, которая есть интегралъ выраженія $m\pi y^2 . dx$. Если m постоянное, то мы имѣемъ

$$m\pi \int_0^b x a^2 x^{2n} . dx = m\pi a^2 \int_0^b x^{2n+1} dx =$$

$$= \frac{m\pi a^2}{2n+2} \left[{}_0^b x^{2n+2}\right] = \frac{m\pi a^2}{2n+2} b^{2n+2},$$

а полная масса равна $\frac{m\pi a^2}{2n+2} b^{2n+1}$, такъ что $\overline{x} =$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} b.$$

Предположимъ, что m не постоянное, а слѣдуетъ закону

$$m = m_0 + cx^s.$$

Найдемъ массу и центръ массы вышеприведеннаго тѣла для этого случая. Нашъ первый интегралъ принимаетъ видъ

$$\pi \int (m_0 x + cx^{s+1}) a^2 x^{2n} . dx, \quad \text{или} \quad a^2\pi \int (m_0 x^{2n+1} + cx^{2n+s+1})\, dx, \quad \text{или}$$

$$a^2\pi \left[\frac{m_0}{2n+2} x^{2n+2} + \frac{c}{2n+s+2} x^{2n+s+2} \right]_0^b \ldots \quad (1).$$

Масса равна $a^2\pi \int_0^b (m_0 + cx^s)\, x^{2n} . dx$

или
$$a^2\pi \left[\frac{m_0}{2n+1} x^{2n+1} + \frac{c}{2n+s+1} x^{2n+s+1} \right] . (2).$$

Подставляя b вмѣсто x въ обоихъ выраженіяхъ и дѣля (1) на (2), находимъ $\bar{x}$.

Способный студентъ можетъ самъ составить себѣ много упражненій подобнаго рода, заключающихъ интегрированіе x^n.

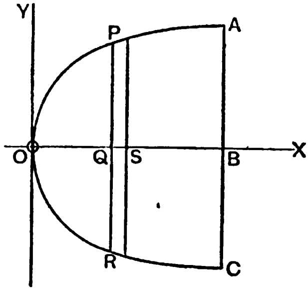
Дуга эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается около оси x'овъ, найти объемъ части **эллипсоида вращенія** между двумя плоскостями $x = 0$ и $x = c$. Здѣсь $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Интегралъ πy^2 равенъ

$$\pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - {}^1/_3 x^3 \right]_0^c = \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 c - {}^1/_3 c^3).$$

Объемъ полнаго эллипсоида равенъ $\frac{4\pi}{3} b^2 a$, а шара $\frac{4\pi}{3} a^3$.

47. Длины кривыхъ. На чер. 21 координаты точки P суть x и y, а точки Q $x + \delta x$ и $y + \delta y$. Если мы длину кривой отъ нѣкотораго опредѣленнаго мѣста до точки P

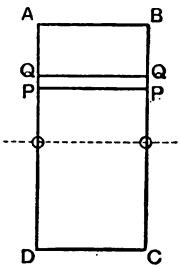
что, если даны размѣры фигуры, напримѣръ, если на черт. 32, даны AB, PQ и BQ, то мы можемъ найти положеніе центра площади въ функціи отъ этихъ размѣровъ.



Черт. 32.

54. Моментъ инерціи прямоугольника.

Моментъ инерціи прямоугольника относительно линіи OO, проходящей черезъ его центръ и параллельной одной изъ его сторонъ. Пусть $AB = b$, $BC = d$ (черт. 33).



Черт. 33.

Разсмотримъ отрѣзокъ площади между $OP = y$ и $OQ = y + \delta y$. Его площадь равна $b\delta y$, а моментъ инерціи относительно OO равенъ $by^2\delta y$, такъ что моментъ инерціи всего прямоугольника равенъ

$$b\int_{-\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d} y^2 \,.\, dy \text{ или } b\left[{}_{-\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d}\ \tfrac{1}{3}y^3\right] \text{ или } \frac{bd^3}{12}.$$

Этотъ моментъ инерціи очень важенъ въ расчетахъ балокъ.

55. Сила тяжести. Однородный сферическій слой притягивающаго вещества не выказываетъ никакого дѣйствія на тѣло, находящееся внутри его. На единицу массы, находящейся внѣ его, дѣйствуетъ такъ, какъ будто бы вся его масса была сосредоточена въ его центрѣ.

Земля поэтому оказываетъ притяженіе на единицу массы, лежащей внѣ ея въ нѣкоторой точкѣ P, обратно пропорціональное квадрату r—разстоянія P отъ ея центра. Но,

если P находится внутри земли, то притяженіе на единицу массы равно массѣ сферы *внутренней* по отношенію къ P, дѣленной на квадратъ r.

1. Положимъ, что земной шаръ представляетъ однородное тѣло. Если m есть масса на единицу объема и R радіусъ земли, то притяженіе, оказываемое на нѣкоторую точку, лежащую внѣ его, равно $\frac{4\pi}{3}.mR^3 : r^2$.

Притяженіе въ нѣкоторой точкѣ, лежащей внутри его, равно $\frac{4\pi}{3}mr^3 : r^2$ или $\frac{4\pi}{3}mr$. Если мы затѣмъ назовемъ притяженіе на поверхности единицей, то въ нѣкоторой внѣшней точкѣ оно будетъ $R^2 : r^2$, а въ какой либо внутренней $r : R$. Студенты должны выяснить это помощью діаграммы.

2. Если m увеличивается по направленію къ центру, положимъ, $m = a - br$, тогда площадь сферическаго слоя радіуса r равна $4\pi r^2$, его масса $4\pi r^2 m . \delta r$, такъ что полная масса шара радіуса r равна $4\pi \int_0^r r^2 (a - br)\, dr$ или $\frac{4\pi}{3} ar^3 - \pi br^4$. Отсюда притяженіе, оказываемое на какую либо внутреннюю точку, равно $\frac{4\pi}{3} ar - \pi br^2$, а на какую либо внѣшнюю точку $\left(\frac{4\pi}{3} aR^3 - \pi bR^4\right) : r^2$. Дѣля общую массу земли на ея объемъ $\frac{4\pi}{3} R^3$, мы находимъ, что ея средняя плотность равна $a - {}^3/_4 bR$, а отношеніе средней плотности къ плотности на поверхности

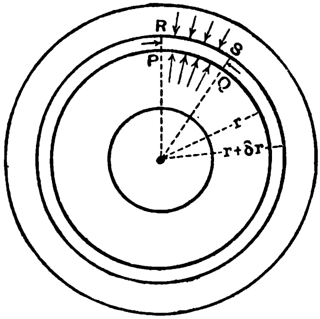
$$(4a - 3bR) : (4a - 4bR).$$

56. Прочность цилиндровъ, подверженныхъ давленію.

Первая часть слѣдующей статьи представляетъ методъ вывода общеизвѣстной теоріи тонкой цилиндрической стѣнки парового котла. Затрудненія со знаками $+$ и $-$ мы обойдемъ тѣмъ, что будемъ представлять давленіе снаружи

бо́льшимъ, чѣмъ давленіе извнутри, и потому матерьялъ является сжатымъ.

Разсмотримъ элементарный тонкій цилиндръ радіуса r и толщины δr. Пусть (черт. 34) внутреннее давленіе будетъ p, а внѣшнее $p+\delta p$ и пусть сжимающее напряженіе въ матерьялѣ, перпендикулярно къ радіусамъ будетъ q. Разсмотримъ часть кольца $PQSR$, имѣющаго длину равную единицѣ по направленію перпендикулярному къ плоскости бумаги.

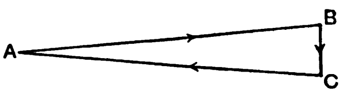


Черт. 34.

По направленію радіусовъ мы имѣемъ съ внѣшней стороны давленіе $p+\delta p$, дѣйствующее на площадь RS или $(r+\delta r)\,\delta\theta$, если уголъ $QOP=$ $=\delta\theta$, такъ какъ дуга RS равна радіусу, умноженному на уголъ; и $p.r.\delta\theta$ съ внутренней стороны, отсюда

$$(p+\delta p)\,(r+\delta r)\,\delta\theta - pr.\delta\theta$$

представитъ собою въ цѣломъ радіальную силу, приложенную извнѣ, тѣмъ болѣе точно, чѣмъ менѣе будетъ уголъ $\delta\theta$. Эта сила уравновѣшивается двумя силами, равными каждая $q.\delta r$, наклоненными подъ угломъ $\delta\theta$, и точно также, какъ въ пунктѣ 98, если мы начертимъ треугольникъ, каждая изъ сторонъ котораго AB и CA (черт. 35) параллельна $q.\delta r$, и уголъ BAC равенъ $\delta\theta$, то BC представитъ силу, дѣйствующую по направленію радіуса, и мы видимъ, что эта радіальная сила по мѣрѣ уменьшенія $\delta\theta$ все болѣе приближается къ величинѣ $q.\delta r.\delta\theta$. Отсюда



Черт. 35.

$$(p+\delta p)\,(r+\delta r)\,\delta\theta - pr.\delta\theta = q.\delta r.\delta\theta,$$

или

$$p.\delta r + r.\delta p + \delta p.\delta r = q.\delta r,$$

или проще $$p + r\frac{dp}{dr} = q \text{ ....(1).}$$

такъ какъ величина δp въ предѣлѣ равна 0.

Когда матерьялъ подверженъ сжимающимъ усиліямъ p и q, направленнымъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу въ плоскости бумаги, то въ направленіи перпендикулярномъ къ плоскости бумаги происходятъ удлиненія, которыя пропорціональны $p + q$.

Мы имѣемъ право сдѣлать допущеніе, что плоскія сѣченія остаются таковыми и при дѣйствіи на нихъ силъ, въ такомъ случаѣ удлиненія эти не зависятъ отъ r. Отсюда (1) слѣдуетъ сопоставить съ

$$p + q = 2A \text{ ....(2),}$$

гдѣ $2A$—постоянная величина.

Подставляя величину q изъ (2) въ (1), имѣемъ

$$p + r\frac{dp}{dr} = 2A - p, \qquad \text{или}$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{2A}{r} - \frac{2p}{r}$$

Затѣмъ путемъ пробныхъ подстановокъ можно найти, что это уравненіе удовлетворяется при

$$p = A + \frac{B}{r^2} \text{ ....(3),}$$

а отсюда изъ (2) $$q = A - \frac{B}{r^2} \text{ ....(4).}$$

Найдемъ эти постоянныя A и B. Положимъ, что мы имѣемъ дуло ружья или гидравлическій прессъ, подверженный внутреннему давленію p_0 при $r = r_0$ и внѣшнему давленію 0 при $r = r_1$. Внося эти величины p въ (3), имѣемъ

$$p_0 = A + \frac{B}{r_0^2},$$

$$0 = A + \frac{B}{r_1^2};$$

такъ что $$B=p_0:\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)=p_0\frac{r_0^2r_1^2}{r_1^2-r_0^2},$$

$$A=-p_0\frac{r_0^2}{r_1^2-r_0^2};$$

и $$-q=\frac{p_0r_0^2}{r_1^2-r_0^2}\left(1+\frac{r_1^2}{r^2}\right).$$

Сжимающее напряженіе $-q$ назовемъ растягивающимъ напряженіемъ f.

$$f=p_0\frac{r_0^2}{r_1^2-r_0^2}\cdot\frac{r_1^2+r^2}{r^2}\,\ldots\ldots\ldots(5),$$

f наибольшее при $r=r_0$ и тогда оно равно

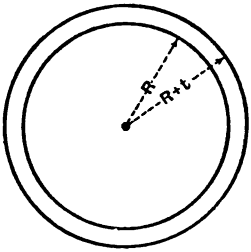
$$f_0=p_0\frac{r_1^2+r_0^2}{r_1^2-r_0^2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

Этотъ законъ имѣетъ мѣсто для прочности цилиндра, который вначалѣ не былъ напряженъ. Замѣтимъ, что p_0 никогда не можетъ быть равно вытягивающему напряженію въ матерьялѣ. Мы видимъ изъ (5), что, по мѣрѣ увеличенія r, f уменьшается обратно пропорціонально квадрату радіуса, такъ что легко показать его измѣненіе помощью кривой. Итакъ, студенты должны взять $r_1=1{\cdot}2$, $r_0=0{\cdot}8$, $p_0=1500$ фунт. на кв. дюймъ и начертить кривую f отъ внутренней поверхности до внѣшней. f будетъ выражено въ тѣхъ же единицахъ, какъ и p. Мы можемъ смотрѣть на (5), какъ на уравненіе, дающее намъ величину вытягивающаго напряженія въ цилиндрѣ, подвергнутомъ разрывающему давленію, если въ началѣ онъ не испытывалъ никакихъ напряженій. Если же при $p_0=0$ есть уже напряженія въ матерьялѣ, то напряженія, полученныя изъ (5), алгебраически складываются съ существующими уже въ той же точкѣ. Поэтому при отливкѣ гидравлическаго пресса его охлаждаютъ извнутри, а при выдѣлкѣ ружейнаго дула его дѣлаютъ изъ трубокъ, изъ которыхъ каждая нажимаетъ предыдущую внутрь, и мы стараемся при этомъ получить такое начальное сжимающее напряженіе при $r=r_0$ и такое начальное вытягивающее напряженіе при $r=r_1$, чтобы, когда вытягивающія усилія, соотвѣтствующія p_0, начнутъ

проявляться въ матерьялѣ и цилиндръ будетъ близокъ къ разрыву, то напряженія матерьяла отъ r_0 до r_1 вездѣ были бы однѣ и тѣ же *).

Тонкій цилиндръ. Возьмемъ $r_0 = R$ и $r_1 = R + t$, гдѣ t очень мало сравнительно съ R,

$$f_0 = p_0 \frac{2R^2 + 2Rt + t^2}{2Rt + t^2} = \frac{p_0 R}{t}\left(1 + \frac{t}{R} + \frac{t^2}{2R^2}\right) : \left(1 + \frac{t}{2R}\right)$$



Черт. 36.

*) Представимъ себѣ цилиндрическое тѣло, вращающееся съ угловой скоростью α, при чемъ ρ—масса единицы объема. Если ввести въ расчетъ центробѣжную силу, дѣйствующую на элементъ, равновѣсіе котораго разсматривается, то уравненіе (1) обращается въ $p + r\frac{dp}{dr} - r^2\rho\alpha^2 = q$ и рѣшеніе этого уравненія будетъ $p = A + Br^{-2} + {}^1/_4\rho\alpha^2 r^2$; внося значенія p для двухъ величинъ r, находимъ постоянныя A и B; q поэтому извѣстно. Если мы возьмемъ $p = 0$ при $r = r_0$, а также и при $r = r_1$, то

$$q = {}^1/_4\rho\alpha^2[-r^2 + \left\{r_0^{-2}r_1^2 - r_1^{-2}r_0^2 + r^{-2}(r_1^2 - r_0^2)\right\} : (r_1^{-2} - r_0^{-2})].$$

Эта величина имѣетъ наибольшее значеніе при $r = r_0$.

Если цилиндръ сплошной, то мы можемъ написать условіе, что при $r = 0$ деформація равна 0, и нужно получить значенія напряженій. Относительное удлиненіе по направленію радіуса $= p\alpha - q\beta$, если α есть обратная величина модуля Юнга, а β/α есть отношеніе Пуассона, вообще равное 0·25.

Такимъ образомъ мы найдемъ напряженія и относительныя удлиненія во вращающемся сплошномъ цилиндрѣ, но, прилагая наши результаты къ случаю тонкаго диска, мы видимъ, что уравненіе (2), приведенное выше, неправильно. Иначе говоря, рѣшеніе будетъ тѣмъ дальше отъ истиннаго, чѣмъ тоньше дискъ. Болѣе правильное рѣшеніе, данное Dr Chree не заключаетъ въ себѣ особенныхъ трудностей.

Но $\frac{t}{R}$, $\frac{t^2}{2R^2}$ и $\frac{t}{2R}$ становятся все менѣе и менѣе по мѣрѣ уменьшенія t. Мы можемъ принять $f = \frac{pR}{t}$ ....(7), какъ формулу, которой можно пользоваться, когда стѣнка очень тонка, и $f = \frac{pR}{t} + \frac{p}{2}$....(8), какъ болѣе точное приближеніе, которое получится, если взять въ формулѣ (7) средній радіусъ. Но на практикѣ, если будемъ разсматривать котелъ или трубку, то встрѣтимъ столько неопредѣленности въ вопросѣ о истинной величинѣ предѣльнаго напряженія f, что мы имѣемъ право пренебречь поправкой въ обыкновенно употребляемой формулѣ (7).

57. Индикаторная діаграмма газовой машины. Можно доказать, что, когда объемъ и давленіе совершеннаго газа (законъ котораго есть $pv = Rt$ для фунта газа, при чемъ R—постоянное, равное $K - k$ разности главныхъ удѣльныхъ теплоемкостей; γ обозначаетъ отношеніе K/k) измѣняются какимъ либо путемъ, то количество поглощенной имъ теплоты на единицу приращенія объема, которое мы назовемъ h (въ единицахъ работы) или $\frac{dH}{dv}$ равно

$$h = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dv}(pv) + p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

или

$$h = \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ v\frac{dp}{dv} + \gamma p \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Студенты должны обратить вниманіе на то, что производная $\frac{dp}{dv}$ означаетъ совсѣмъ не то, что $\left(\frac{dp}{dv}\right)$, такъ какъ мы можемъ дать ей какое угодно значеніе.

Мы всегда предполагаемъ, что H выражено въ единицахъ работы, чтобы избѣжать необходимости вводить J эквивалентъ Джоуля.

Упражненіе 1. Газъ расширяется по закону $pv^s = c$..(3), гдѣ c постоянное; найти h.

Отвѣтъ: $h = \frac{\gamma - s}{\gamma - 1} p$ ....(4).

Очевидно, что когда $s=\gamma$, $h=0$ и отсюда мы имѣемъ, что $pv^\gamma =$ постоянному выражаетъ адiобатическiй законъ расширенiя совершеннаго газа. $\gamma = 1{\cdot}41$ для воздуха и $1{\cdot}37$ для газа, образующагося въ цилиндрѣ газоваго или керосиноваго двигателя. Когда $s=1$, такъ что законъ расширенiя будетъ $pv =$ постоянному, мы имѣемъ изотермическое расширенiе газа и замѣчаемъ, что здѣсь $h=p$, или количество поглощенной тепловой энергiи равно количеству отданной механической энергiи. Замѣтимъ, что во всѣхъ случаяхъ, когда законъ измѣненiя тѣлъ представленъ въ видѣ (3), h пропорцiонально p. Если s болѣе γ, то тѣло отдаетъ теплоту.

Если уравненiе (1) проинтегрируемъ относительно v, то получимъ $H_{01} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1v_1 - p_0v_0) + W_{01}$ . . . (5). Здѣсь H_{01} есть количество теплоты, сообщенное одному фунту совершеннаго газа между состоянiями его p_0, v_0, t_0 и p_1, v_1, t_1, а W_{01} работа, произведенная имъ при расширенiи между первымъ состоянiемъ и вторымъ.

Это выраженiе можетъ быть представлено въ другой формѣ, такъ какъ мы имѣемъ связь $pv = Rt$ . . . (6). Оно очень полезно въ расчетахъ газовыхъ машинъ. Такъ, если объемъ остается постояннымъ, W_{01} равно 0 и можно опредѣлить измѣненiе давленiя, происшедшее отъ воспламененiя и, слѣдовательно, сообщенiя извѣстнаго количества теплоты. Если давленiе остается постояннымъ, W_{01} равно $p(v_1 - v_0)$ и легко найти измѣненiе объема, соотвѣтствующее затраченному количеству теплоты.

Другое полезное выраженiе есть $\frac{dH}{dv} = k\frac{dt}{dv} + p$ . . (7), гдѣ k—постоянное, представляющее удѣльную теплоемкость при постоянномъ объемѣ. Интегрируя его относительно v, мы находимъ

$$H_{01} = k(t_1 - t_0) + W_{01} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Эта формула даетъ намъ точно такой же отвѣтъ, какъ и предыдущiй методъ, и можетъ быть выведена изъ (5) при посредствѣ (6). Изъ этого выраженiя видно, что, если не производится работа, то сообщенное количество теплоты

равно $k(t_1 - t_0)$, а также, что, если температура не мѣняется, то сообщенное количество теплоты равно совершенной работѣ.

58. **Упругость** опредѣляется, какъ частное отъ дѣленія приращенія напряженія на приращеніе относительнаго удлиненія. Такъ, модуль упругости Юнга есть вытягивающее или сжимающее напряженіе (или сила, дѣйствующая на единицу площади поперечнаго сѣченія балки или стойки), дѣленное на относительное удлиненіе или на дробь, выражающую измѣненіе длины. Модуль жесткости или поперечной упругости есть перерѣзывающее напряженіе, дѣленное на поперечное относительное сдвиженіе. Объемная упругость e есть напряженіе или приращеніе давленія, дѣленное на дробь, выражающую уменьшеніе объема. Итакъ, если тѣло при p и v переходитъ въ состояніе $p + \delta p$, $v + \delta v$, тогда объемное напряженіе есть δp и объемное относительное сжатіе $-\frac{\delta v}{v}$, такъ что согласно опредѣленію $e = -\delta p : \frac{\delta v}{v}$, или $e = -v\frac{\delta p}{\delta v}$. Опредѣленіе это конечно предполагаетъ, что напряженіе и сжатіе безгранично убываютъ, и потому $e = -v\frac{dp}{dv}$ . . . (1).

Теперь посмотримъ, какова можетъ быть эта величина въ различныхъ случаяхъ. Такъ упругость при постоянномъ давленіи равна 0. Упругость при постояномъ объемѣ равна $-\infty$. Чтобы найти упругость при постоянной температурѣ, мы должны найти $\left(\frac{dp}{dv}\right)$ (см. пунктъ 30). Такъ какъ $pv = Rt$, то $p = Rtv^{-1}$. Здѣсь Rt постоянное, такъ что

$$\left(\frac{dp}{dv}\right) = -Rtv^{-2} \text{ и } e = Rtv^{-1} = p.$$

Обыкновенно обозначаютъ эту величину e_t и мы видимъ, что упругость e_t при постоянной температурѣ равна p. Это была величина упругости, принятая Ньютономъ. Пользуясь этой величиной въ своихъ вычисленіяхъ скорости звука, онъ получилъ отвѣтъ, который сильно отличается отъ опредѣленной опытнымъ путемъ скорости звука, такъ какъ при

быстрыхъ перемѣнахъ давленія температура не остается постоянной.

Упражненіе. Найти упругость совершеннаго газа, когда этотъ газъ слѣдуетъ закону $pv^\gamma = c$—нѣкоторому постоянному. Это есть адіабатическій законъ, который мы имѣли въ пунктѣ 57, законъ, связывающій p и v, когда вещество не теряетъ и не получаетъ теплоты извнѣ. $p = cv^{-\gamma}$, такъ что $\frac{dp}{dv} = -\gamma c v^{-\gamma-1}$ и

$$e = +v\gamma c v^{-\gamma-1} \text{ или } \gamma c v^{-\gamma} \text{ или } \gamma p.$$

Принято обозначать эту величину e_H, и мы видимъ, что въ совершенномъ газѣ $e_H = \gamma e_t$. Если въ вычисленіяхъ Ньютона принять за упругость воздуха эту величину, то отвѣтъ согласуется съ найденной опытнымъ путемъ скоростью звука.

59. Треніе въ плоской пятѣ. Если мы имѣемъ пяту радіуса R, несущую грузъ W, и грузъ этотъ равномѣрно распредѣленъ по поверхности ея, то нагрузка на единицу площади будетъ $w = W : \pi R^2$. Пусть угловая скорость будетъ a (въ радіанахъ) въ секунду. На кольцевой площади между радіусами r и $r + \delta r$ нагрузка равна $w \,.\, 2\pi r \,.\, \delta r$, а сила тренія $\mu w \,.\, 2\pi r \,.\, \delta r$, гдѣ μ — коэффиціентъ тренія. Скорость есть $v = ar$, такъ что работа, затрачиваемая каждую секунду на преодолѣніе тренія по этой элементарной площади равна $\mu \,.\, 2\pi w a r^2 \,.\, \delta r$, а потому полная энергія, затрачиваемая въ секунду равна

$$2\pi w a \mu \int_0^R r^2 \,.\, dr = {}^2/_3 \pi w a \mu R^3 = {}^2/_3 \mu a W R.$$

При кольцевой пятѣ внутренняго радіуса R_1 и внѣшняго R_2, мы имѣемъ $2\pi w \mu a \int_{R_1}^{R_2} r^2 \,.\, dr = {}^2/_3 \pi w a \mu (R^3{}_2 - R_1{}^3)$, $W = \pi w (R_2{}^2 - R_1{}^2)$ и отсюда энергія, затраченная въ секунду ${}^2/_3 a \mu W \frac{R_2{}^3 - R_1{}^3}{R_2{}^2 - R_1{}^2}$.

60. Упражненія, касающіяся изгиба балокъ. Когда изгибающій моментъ M въ сѣченіи балки извѣстенъ, мы можемъ вычислить кривизну въ этомъ мѣстѣ, если балка была прямая до нагруженія, или измѣненіе кривизны, если балка еще до нагруженія была уже кривой. Это обыкновенно изображается такъ

$$\frac{1}{r} \text{ или } \frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}=\frac{M}{EI},$$

гдѣ I моментъ инерціи поперечнаго сѣченія относительно линіи, проходящей черезъ центръ его тяжести и перпендикулярной къ плоскости изгиба, а E есть модуль Юнга для даннаго матерьяла. Такъ, если балка имѣетъ прямоугольное сѣченіе высотой d и шириной b, то $I={}^1/_{12}bd^3$ (см. 54); если балка круглаго сѣченія $I=\frac{\pi}{4}R^4$, если R радіусъ сѣченія (см. 50); если брусъ эллиптическаго сѣченія, то $I=\frac{\pi}{4}a^3b$, если a и b суть радіусы сѣченія въ плоскости изгиба и перпендикулярно къ ней (см. пунк. 50) †.

Кривизна. Кривизна круга есть обратная величина его радіуса, а кривизна какой либо кривой — это кривизна такого круга. который лучше всего совпадаетъ съ кривой. Кривизна кривой есть также и «угловое измѣненіе (въ радіанахъ) направленія кривой на единицу длины». Теперь начертимъ очень пологую кривую съ весьма малымъ уклономъ. Замѣтимъ, что измѣненіе $\frac{dy}{dx}$ при переходѣ отъ точки P къ Q почти въ точности равно измѣненію угла (измѣненіе $\frac{dy}{dx}$ есть въ дѣйствительности измѣненія тангенса угла, но, когда уголъ малъ, то уголъ, его синусъ и тангенсъ—почти равны между собой). Отсюда приращеніе $\frac{dy}{dx}$ отъ P до Q, дѣленное на длину кривой, есть средняя кривизна отъ P до Q и, чѣмъ меньшую беремъ длину PQ, тѣмъ болѣе точно эта величина приближается къ значенію кривизны въ

точкѣ P. Но, когда кривая очень полога, длина дуги PQ равна приблизительно δx, и измѣненіе $\frac{dy}{dx}$, дѣленное на δx, по мѣрѣ уменьшенія δx, приближается къ величинѣ производной отъ $\frac{dy}{dx}$ по x, а для этого мы имѣемъ символъ $\frac{d^2y}{dx^2}$. Отсюда мы можемъ принять $\frac{d^2y}{dx^2}$ за кривизну кривой всюду, гдѣ ея уклонъ малъ.

Если балка съ самого начала имѣетъ кривизну и если y' есть ея небольшой прогибъ въ какой либо точкѣ, то ея первоначальная кривизна есть $\frac{d^2y'}{dx^2}$. Мы можемъ обобщить выводы, пользуясь вездѣ выраженіемъ $\frac{d^2}{dx^2} \cdot (y - y')$ вмѣсто $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Легко доказать, что балка равнаго сопротивленія, т. е. такая, въ которой наибольшее напряженіе f (если сжимающее, то положительное, если вытягивающее, то отрицательное) во всякомъ сѣченіи одно и то же, имѣетъ вездѣ одну и ту же кривизну, если высота ея постоянна.

Если d высота, то условіе равнаго сопротивленія будетъ $\frac{M}{I} \cdot {}^1/_2 d = \pm f$ — постоянному. Но $\frac{M}{I} = E \times$ кривизна, отсюда кривизна $= \pm \frac{2f}{Ed}$.

Упражненіе. Пусть въ балкѣ равнаго сопротивленія $d = \frac{1}{a+bx}$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2f}{E}(a+bx)$. Интегрируя, находимъ

$$\frac{E}{2f} \cdot \frac{dy}{dx} = c + ax + {}^1/_2 bx^2; \quad \frac{E}{2f} \cdot y = e + cx + {}^1/_2 ax^2 + {}^1/_6 bx^3,$$

гдѣ c и e должны быть опредѣлены по нѣкоторымъ даннымъ условіямъ. Такъ, если балка закрѣплена однимъ концомъ при $x = 0$, то въ этой точкѣ $\frac{dy}{dx} = 0$ и $y = 0$, а потому $c = 0$ и $e = 0$.

Мы знаемъ теперь, что, если въ прямой балкѣ x—разстояніе, измѣренное отъ нѣкотораго мѣста ея до даннаго сѣченія, и если y есть прогибъ ея въ этомъ сѣченіи и I моментъ инерціи сѣченія, то

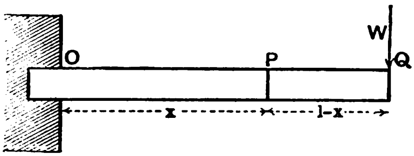
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

гдѣ M изгибающій моментъ въ данномъ сѣченіи, а E модуль Юнга для даннаго матерьяла.

Мы даемъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ знакъ, который дѣлаетъ ее положительной при M положительномъ. Если M выгибаетъ балку вверхъ и y измѣряемъ сверху внизъ, тогда (1) правильно. Затѣмъ (1) правильно, если M выгибаетъ балку внизъ и y измѣряемъ снизу вверхъ.

Примѣръ 1. **Балка однообразнаго сѣченія длиною l** (черт. 37) **задѣлана однимъ концомъ** и на другомъ концѣ нагружена грузомъ W. Пусть x будетъ разстояніе сѣченія отъ закрѣпленнаго конца балки. Тогда $M = W(l - x)$, такъ что (1) принимаетъ видъ

$$\frac{EI}{W} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = l - x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$



Черт. 37.

Интегрируя, имѣемъ, такъ какъ E и I постоянныя

$$\frac{EI}{W} \cdot \frac{dy}{dx} = lx - {}^1/_2 x^2 + c.$$

Изъ этого уравненія мы можемъ вычислить уклонъ въ любомъ мѣстѣ.

Чтобы найти c, мы должны знать наклонъ въ одной какой либо точкѣ. Мы знаемъ, что въ закрѣпленномъ концѣ нѣтъ наклона, а потому $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = 0$, отсюда $c = 0$. Интегрируя вновь, получимъ

$$\frac{EI}{W} y = {}^1/_2 lx^2 - {}^1/_6 x^3 + C.$$

Чтобы найти C, мы знаемъ, что $y = 0$ при $x = 0$, от-

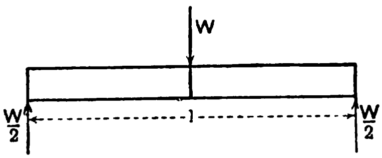
сюда $C=0$, такъ что для формы, которую приметъ балка, мы имѣемъ уравненіе, дающее намъ y въ каждой точкѣ балки

$$y=\frac{W}{EI}\,({}^1\!/_2 lx^2 - {}^1\!/_6 x^3)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Намъ обыкновенно нужно бываетъ знать y при $x=l$, и эта величина x называется D прогибомъ балки, такъ что

$$D=\frac{Wl^3}{3EI}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4).$$

Примѣръ II. Балка длиною l **нагружена грузомъ** W **по серединѣ и поддерживается по концамъ** (черт. 38). Представимъ себѣ, что половина балки послѣ загруженія ея залита цементомъ и такимъ образомъ неподвижно закрѣплена; тогда другая половина представитъ собою простую балку длиною $\frac{l}{2}$, закрѣпленную однимъ концомъ и нагруженную на



Черт. 38.

другомъ грузомъ $\frac{W}{2}$, и на основаніи предыдущаго ея прогибъ будетъ

$$D=\frac{{}^1\!/_2 W({}^1\!/_2 l)^3}{3EI}=\frac{Wl^3}{48EI}\,.\;.\;.\;.\;.\;(5).$$

Студентъ долженъ сдѣлать схематическій чертежъ для выясненія этого метода рѣшенія задачи.

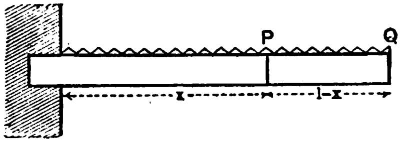
Примѣръ III. Балка **закрѣплена однимъ концомъ и равномѣрно загружена** по всей своей длинѣ сплошной нагрузкой w на единицу длины (черт. 39).

Нагрузка на части PQ есть $w\times PQ=w(l-x)$.

Равнодѣйствующая этой нагрузки имѣетъ точку прило-

женія на серединѣ между P и Q, такъ что, умножая на $^1/_2(l-x)$, мы находимъ M въ точкѣ P

$$M=\frac{w}{2}(l-x)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$



Черт. 39.

Подставя эту величину въ (1), имѣемъ

$$\frac{2EI}{w}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=l^2-2lx+x^2.$$

Интегрируя, имѣемъ

$$\frac{2EI}{w}\cdot\frac{dy}{dx}=l^2x-lx^2+{}^1/_3x^3+c.$$

Это уравненіе даетъ намъ уклонъ въ любомъ сѣченіи балки. Затѣмъ $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$, такъ какъ балка здѣсь закрѣплена. Отсюда $c=0$.

Интегрируя вновь, получимъ

$$\frac{2EI}{w}\cdot y={}^1/_2l^2x^2-{}^1/_3lx^3+{}^1/_{12}x^4+C,$$

и, такъ какъ $y=0$ при $x=0$, то $C=0$ и отсюда уравненіе изогнутой балки

$$y=\frac{w}{24EI}(6l^2x^2-4lx^3+x^4) \quad \ldots\ldots (7),$$

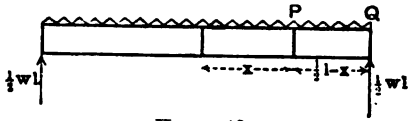
y наибольшее на концѣ, гдѣ $x=l$, такъ что прогибъ равенъ

$$D=\frac{w}{24EI}\cdot 3l^4 \text{ или } D=\frac{1}{8}\ \frac{Wl^3}{EI} \quad \ldots\ldots (8),$$

если $W=wl$—полная нагрузка на балку.

Примѣръ IV. **Балка** длиною l, **загруженная по всей длинѣ сплошной равномѣрной нагрузкой** w **на** единицу длины и поддерживаемая по концамъ (черт. 40).

Каждое изъ опорныхъ сопротивленій равно половинѣ полнаго груза. Моментъ въ сѣченіи P отъ груза $\frac{wl}{2}$ на разстояніи PQ направленъ обратно движенію часовой стрѣлки, и я называю его направ-



Черт. 40.

леніе положительнымъ; моментъ груза $w\left(\frac{l}{2}-x\right)$ при среднемъ разстояніи $^1/_2PQ$ поэтому отрицателенъ, и потому изгибающій моментъ въ сѣченіи P будетъ

$^1/_2wl\,(^1/_2l-x)-{}^1/_2w\,(^1/_2l-x)^2$, или $^1/_8wl^2-{}^1/_2wx^2$. (9),

такъ что изъ (1)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}={}^1/_8wl^2-{}^1/_2wx^2,$$

при чемъ y есть возвышеніе точки P надъ срединой балки (см. 60). Интегрируя, имѣемъ

$$EI\frac{dy}{dx}={}^1/_8wl^2x-{}^1/_6wx^3+c,$$

формула, дающая намъ уклонъ въ любомъ сѣченіи балки; c опредѣляется на основаніи того, что мы знаемъ, что $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$, отсюда $c=0$.

Интегрируя вновь, получимъ

$$EIy={}^1/_{16}wl^2x^2-{}^1/_{24}wx^4+C,$$

гдѣ $C=0$, такъ какъ $y=0$ при $x=0$. Отсюда уравненіе изогнутой балки $y=\frac{w}{48EI}(3l^2x^1-2x^4)$. . . . . (10), при чемъ y имѣетъ наибольшую величину при $x=\frac{l}{2}$ и такъ

называемый прогибъ балки D будетъ $D=\frac{5Wl^3}{384EI}$, если $W=wl$—полная нагрузка.

61. Балки, закрѣпленныя по концамъ. Вращающіе моменты, дѣйствующіе по концамъ балки для закрѣпленія ея (т. е. для удержанія ея концевыхъ сѣченій въ вертикальныхъ плоскостяхъ), равны и прямо противоположны, если нагрузка распредѣлена симметрично по обѣ стороны отъ середины балки. При равенствѣ вращающихъ моментовъ опорныя сопротивленія тѣ же, что и выше. Далѣе, если m есть изгибающій моментъ (положительный, если балка становится вогнутой кверху), который вызвали бы нагрузка и опорныя сопротивленія при свободныхъ концахъ, то изгибающій моментъ въ настоящемъ случаѣ равенъ $m-c$, такъ какъ концевые вращающіе моменты c равны и противоположны, а опорныя сопротивленія остаются неизмѣнными.

Такимъ образомъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{m-c}{EI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Если балка одинаковаго сѣченія, то, интегрируя, найдемъ

$$EI\frac{dy}{dx}=\int m\,.\,dx-cx+\text{const}\,\ldots\ldots (2).$$

Возьмемъ за x—разстояніе отъ одного конца. Мы имѣемъ два условія: $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=l$, если l длина балки. Отсюда, если мы вычтемъ значеніе (2) при $x=0$ изъ значенія его же при $x=l$, то получимъ

$$0=\int_0^l mdx-cl \quad \text{или} \quad c=\frac{1}{l}\int_0^l mdx,$$

т. е. c **есть средняя величина** m **на всемъ пролетѣ** балки. Отсюда слѣдующее правило (для симметричнаго загруженія): начертить діаграмму изгибающихъ моментовъ m въ предположеніи, что балка свободно лежитъ на концахъ. Найти среднюю высоту діаграммы и опустить очертаніе кривой на эту величину. Полученная въ результатѣ діаграмма, кото-

рая будетъ отрицательною по концамъ, и будетъ истинной діаграммой изгибающаго момента. Балка обращена вогнутостью кверху тамъ, гдѣ изгибающій моментъ положителенъ, и выпуклостью тамъ, гдѣ онъ отрицателенъ, а въ тѣхъ точкахъ, гдѣ изгибающій моментъ равенъ нулю, кривизны нѣтъ, т. е. это суть точки перегиба.

Примѣръ. Всѣмъ хорошо извѣстно, что, если балка длиною l **свободно лежитъ на двухъ опорахъ и нагружена по серединѣ** грузомъ W, то изгибающій моментъ по серединѣ $= \frac{Wl}{4}$, на опорахъ 0, при чемъ діаграмма состоитъ изъ двухъ прямыхъ линій. Предполагается, что студентъ начертитъ эту діаграмму (см. также примѣръ II). Средняя высота ея равна половинѣ высоты по серединѣ или $^1/_8 Wl$, и это и есть c—вращающій моментъ, который долженъ быть приложенъ на каждомъ концѣ, чтобы закрѣпить его, если **концы балки принимаются закрѣпленными**. Такъ какъ вся діаграмма должна быть понижена на эту высоту, то очевидно, что истинный изгибающій моментъ такой балки, если ея концы закрѣплены, равенъ $\frac{Wl}{8}$ по серединѣ, 0 на половинѣ разстоянія отъ каждаго конца до середины, такъ что тутъ будутъ точки перегиба, и $-\frac{Wl}{8}$ на каждомъ концѣ. Прямоугольная балка или цилиндрическая, или другого какого либо сѣченія, симметричнаго относительно нейтральной оси подвергается одинаковому напряженію по серединѣ и на концахъ.

Примѣръ. **Балка однообразнаго сѣченія, нагруженная равномѣрной сплошной нагрузкой** w на единицу длины, свободно лежитъ на двухъ опорахъ; діаграмма для m есть парабола (см. *прим. IV*, гдѣ $M = {}^1/_8 wl^2 - {}^1/_2 wx^2$); наибольшая величина m по серединѣ пролета равна $\frac{wl^2}{8}$, по концамъ m равно 0. Далѣе, средняя величина m есть $^2/_3$ отъ ея величины по срединѣ (см. пунк. 43, площадь параболы). Отсюда $c = {}^1/_{12} wl^2$. Вычтемъ эту среднюю величину m изъ ординатъ діаграммы и мы получимъ дѣйствительные изги-

бающіе моменты для всѣхъ сѣченій балки въ случаѣ, если **концы балки закрѣплены.**

Поэтому въ такой балкѣ съ закрѣпленными концами изгибающій моментъ по серединѣ равенъ $^1/_{24}wl^2$, а по концамъ $= -{}^1/_{12}wl^2$; діаграмма представитъ параболу, какъ и для балки свободно лежащей на двухъ опорахъ, такъ какъ она получена изъ послѣдней черезъ пониженіе всей діаграммы на $^1/_{12}wl^2$. Точки перегиба ближе къ концамъ, чѣмъ въ послѣднемъ случаѣ. Балка болѣе всего напряжена по концамъ.

Студенты должны построить діаграммы для различныхъ случаевъ симметричнаго загруженія; нужно найти m обыкновеннымъ графическимъ способомъ и понизить діаграмму на ея среднюю высоту.

Когда брусъ симметрично нагруженный съ задѣланными концами имѣетъ неодинаковое сѣченіе по всему пролету, интегралъ (1) будетъ имѣть видъ

$$E\frac{dy}{dx} = \int\frac{m}{I}\,dx - c\int\frac{dx}{I}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3),$$

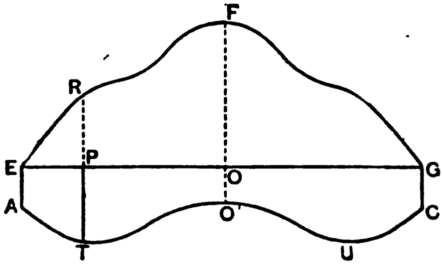
и, такъ какъ эта величина равна 0 при $x=0$ и $x=l$, то, чтобы найти c, необходимо начертить діаграмму, показывающую величину $\frac{m}{I}$ во всякомъ сѣченіи балки, и найти ея площадь. Затѣмъ раздѣлить эту площадь на площадь діаграммы, которая показываетъ величину $\frac{1}{I}$ въ каждомъ сѣченіи, или иначе среднюю высоту діаграммы $\frac{M}{I}$ раздѣлить на среднюю высоту діаграммы $\frac{1}{I}$, и тогда получится c. Вычитая эту величину c изъ всѣхъ величинъ m, мы получимъ истинную діаграмму изгибающаго момента балки. Графическія упражненія гораздо разнообразнѣе и интереснѣе алгебраическихъ, такъ какъ графически очень легко начертить діаграммы m, когда извѣстна нагрузка.

Только что данное рѣшеніе примѣнимо къ балкѣ, въ которой I поперечнаго сѣченія измѣняется какимъ нибудь произвольнымъ образомъ, но только I и нагрузка симметричны относитель-

но середины пролета. Положимъ, что I взято такое, чтобы балка была **равнаго сопротивленія**, т. е. чтобы $\frac{M}{I}z = f_c$ или f_t. (4), гдѣ z наибольшее разстояніе нѣкоторой точки сѣченія отъ нейтральной оси, а f_c и f_t постоянныя по длинѣ наибольшія сжимающія и вытягивающія напряженія, которымъ подвергается матерьялъ въ каждомъ сѣченіи. Принимая f_c по численной величинѣ равнымъ f_t и $z = {}^1/_2 d$, гдѣ d высота балки, получаемъ, что (4) обращается въ $\frac{M}{I}d = \pm 2f$. (5), при чемъ $+$ берется въ частяхъ балки, гдѣ M положителенъ и $-$, гдѣ M отрицателенъ. Такъ какъ $\int_0^l \frac{M}{I}dx = 0$, то, пользуясь (5), получимъ

$$\int \pm \frac{2f}{d}dx = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (6),$$

при чемъ отрицательный знакъ долженъ быть взятъ отъ концовъ балки до точекъ перегиба, а положительный между точками перегиба. Мы видимъ такимъ образомъ, что для того, чтобы удовлетворить (6), мы должны рѣшить слѣдующую задачу. На черт. 41 $EATUCGE$ есть діаграмма, ординаты которой представляютъ $\frac{1}{d}$ обратную величину высоты балки, которая можетъ быть взята произвольной, но



Черт. 41.

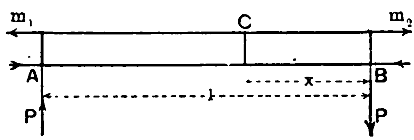
только съ соблюденіемъ условія, чтобы d было тоже самое въ точкахъ, равноотстоящихъ отъ центра. $EFGE$ представ-

ляетъ діаграмму величинъ m, и ее легко начертить, зная нагрузку. Отъ насъ требуется найти такую точку P, чтобы площадь $EPTA$ = площади $POO'T$, гдѣ O есть середина балки. Когда найдена эта точка P, то она и есть точка перегиба, а PR есть то, что мы называемъ c. Такимъ образомъ $m - PR$ есть дѣйствительный изгибающій моментъ M во всякомъ сѣченіи, иначе говоря, чтобы получить діаграмму M, нужно понизить всю діаграмму EFG по вертикали на величину RP. Зная M и d, легко найти I посредствомъ (5).

Очевидно, что, если такая балка **равнаго сопротивленія** имѣетъ также и **одинаковую вездѣ высоту**, то точки перегиба находятся на серединѣ между центромъ и **закрѣпленными концами** балки. Балки равнаго сопротивленія одинаковой высоты имѣютъ вездѣ одинаковую кривизну за исключеніемъ лишь того, что въ точкахъ перегиба знакъ ея внезапно мѣняется.

61. Въ самомъ общемъ случаѣ расположенія нагрузки изгибающіе моменты, которые должны быть приложены къ концамъ балки для закрѣпленія ихъ не равны между собой. Положимъ, m_1 есть вращающій моментъ въ концѣ A (черт. 42), имѣющій направленіе обратное часовой стрѣлкѣ, а m_2 моментъ въ B, вращающій по часовой стрѣлкѣ, и пусть изгибающій моментъ при свободныхъ концахъ равенъ m.

Разсмотримъ невѣсомую и ненагруженную балку той же длины съ моментами m_1 и m_2, приложенными по концамъ; чтобы удержать ее въ равновѣсіи, необходимо приложить къ концамъ ея двѣ равныя



Черт. 42.

и противоположныя силы P, показанныя на чертежѣ. Тогда (по черт. 42) $Pl + m_2 = m_1$, такъ что $P = \frac{m_1 - m_2}{l}$.

Итакъ, если къ балкѣ приложены моменты m_2 и m_1, то они должны быть уравновѣшены показанными на чертежѣ силами P; т. е. въ B должна быть приложена сила, направленная внизъ; это значитъ, что въ B балка стремится подняться, и, слѣдовательно, обыкновенное опорное сопротивленіе въ B должно уменьшиться на эту величину P. Въ нѣкоторой точкѣ C изгибающій моментъ будетъ m

(моментъ балки свободно лежащей на опорахъ)—m_2—$P.BC$....(1). Кто не хочетъ особенно размышлять надъ этимъ, тому достаточно сказать: балка была въ равновѣсіи. будучи нагружена и имѣя свободно лежащіе концы; изгибающій моментъ въ нѣкоторой точкѣ былъ m; мы ввели теперь новую систему силъ, находящихся въ равновѣсіи, и изгибающій моментъ въ C отъ этихъ новыхъ силъ равенъ

$$-(m_2+P.BC).$$

Такимъ образомъ истинный изгибающій моментъ въ C равенъ $m-m_2-P.BC$.

Положимъ, $m_2=0$, тогда $P=\frac{m_1}{l}$ и изгибающій моментъ въ C

будетъ $m-\frac{m_1}{l}.BC$ или $m-P.BC$.

62. **Балка, закрѣпленная въ концѣ A и свободно лежащая въ B,** при чемъ обѣ опоры находятся на одномъ уровнѣ. Такъ какъ $m_2=0$, то, полагая $BC=x$, мы получимъ какъ разъ тотъ случай, о которомъ сейчасъ упоминали, и потому

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=m-Px\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Сначала разсмотримъ балку **одинаковаго сѣченія равномѣрно нагруженную**, какъ въ примѣрѣ IV пунк. 60. Легко убѣдиться, что, если x измѣряется отъ конца балки, то моментъ $m={}^1/_2wlx-{}^1/_2wx^2$, если балка лежитъ свободно на опорахъ. а нагрузка на единицу длины равна w. Отсюда (2) приметъ видъ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}={}^1/_2wlx-{}^1/_2wx^2-Px\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$EI\frac{dy}{dx}={}^1/_4wlx^2-{}^1/_6wx^3-{}^1/_2Px^2+c\ldots\ \ldots\ldots(4).$$

Мы имѣемъ условіе, что $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=l$...(5), такъ какъ, что необходимо замѣтить, мы x измѣряемъ отъ незакрѣпленнаго конца.

Интегрируемъ еще разъ,

$$EIy={}^1/_{12}wlx^3-{}^1/_{24}wx^4-{}^1/_6Px^3+cx\ldots\ldots\ldots(6).$$

Постояннаго мы можемъ не прибавлять, такъ какъ $y=0$ при $x=0$.

Мы имѣемъ также, что $y=0$ при $x=l$. Пользуясь этимъ условіемъ, а также (5), находимъ

$$0={}^1/_{12}wl^3-{}^1/_2Pl^2+c\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$
$$0={}^1/_{24}wl^4-{}^1/_6Pl^3+cl\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8),$$

и отсюда можемъ опредѣлить P и c.

Дѣлимъ (8) на l и вычитаемъ изъ (7), тогда получимъ

$$0 = {}^1/_{24}wl^3 - {}^1/_3Pl^2 \text{ или } P = {}^1/_8wl,$$

отсюда на основаніи (7)

$$0 = {}^1/_{12}wl^3 - {}^1/_{16}wl^3 + c,\ c = -{}^1/_{48}wl^3.$$

Такимъ образомъ истинный изгибающій моментъ будетъ

$${}^1/_2wlx - {}^1/_2wx^2 - {}^1/_8wlx,$$

а (6) даетъ намъ форму изогнутой балки.

63. Если нагрузка расположена какъ нибудь произвольно, и сѣченіе мѣняется произвольно, то при рѣшеніи вышеприведеннаго примѣра слѣдуетъ примѣнить графическій методъ. Если z, представляющая функцію x'а показана помощью кривой, то мы не имѣемъ ни одного средства, которымъ могли бы съ увѣренностью воспользоваться, чтобы нанести новую кривую $\int z.dx$, т. е. построить любую ординату новой кривой, представляющую площадь кривой z отъ нѣкоторой опредѣленной ординаты до принятаго значенія x. Я иногда пользовался клѣтчаткой и считалъ число клѣточекъ. Пользовался я и планиметромъ, чтобы найти площади въ предѣлахъ извѣстныхъ значеній x, строилъ въ этихъ точкахъ ординаты, представлявшія въ масштабѣ площади, и чертилъ отъ руки кривую черезъ десять или двѣнадцать найденныхъ такимъ образомъ точекъ. Есть въ продажѣ и интеграторы, но, хотя быть можетъ и рискованно съ моей стороны сказать это, я не вѣрю въ точность тѣхъ изъ этихъ приборовъ, которые мнѣ приходилось видѣть. Дешевый и точный интеграторъ не только могъ бы быть весьма полезнымъ при рѣшеніи графическихъ задачъ, но пользованіе имъ оказывало бы огромную помощь, способствуя пониманію анализа.

Предположимъ, что студентъ знаетъ какіе либо пріемы, чтобы изобразить $\int_0^x z.dx$ новой кривой; пусть нагрузка расположена какъ нибудь произвольно, и I мѣняется. Такъ какъ

$$M = m - Px = EI\frac{d^2y}{dx^2},$$

то, интегрируя, имѣемъ

$$E\frac{dy}{dx} = \int\frac{m}{I}\,dx - P\int\frac{x\,.\,dx}{I} - c\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(9)$$

Мы видимъ, что необходимо построить діаграмму, ординаты которой представляли бы $\frac{m}{I}$ для любого сѣченія, и взять интегралъ этого выраженія. Обозначимъ $\int_0^x\frac{m}{I}\,dx$ черезъ μ. При $x = l$, μ

обращается въ полную площадь діаграммы $\frac{m}{I}$, и мы назовемъ ее μ_1.

Необходимо также построить діаграмму, ординаты которой представляли бы въ любомъ сѣченіи $\frac{x}{I}$, и взять интегралъ этого выраженія. Обозначимъ $\int_0^x \frac{x}{I}\,dx$ черезъ X. При $x=l$, X обращается въ полную площадь діаграммы $\frac{x}{I}$, и мы назовемъ ее X_1.

Затѣмъ, такъ какъ въ (9)

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{ при } x=l, \text{ то}$$

$$0=\mu_1-PX_1+c\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (10).$$

Интегрируя вновь (9), имѣемъ

$$Ey=\int \mu.dx-P\int X.dx+cx+C.$$

Если мы въ этомъ послѣднемъ выраженіи воспользуемся условіемъ, что при $x=0$, $y=0$, то мы найдемъ, что $C=0$; если же мы еще примемъ во вниманіе, что при $x=l$, $y=0$, и обозначимъ черезъ M_1 и X_1 полныя площади кривыхъ μ и X, то мы получимъ, что

$$0=\mathrm{M}_1-P.\mathrm{X}_1+cl\ {}^{*}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (11),$$

(10) и (11) даютъ возможность найти P и c, при чемъ, конечно, зная P, можно въ любомъ сѣченіи опредѣлить изгибающій моментъ. $-\frac{c}{E}$ представляетъ уклонъ при $x=0$.

64. *Примѣръ.* **Балка перемѣннаго сѣченія съ закрѣпленными**

---

*) Если не пользоваться буквами μ, X, μ_1, X_1 и др., то вышеприведенное изслѣдованіе приметъ видъ

$$\left[{}^{x=l}_{x=0}\ E\frac{dy}{dx}\right]=-c=\int_0^l \frac{m}{I}\,dx-P\int_0^l \frac{x.dx}{I}\ \ldots(10).$$

Интегрируя вновь между предѣлами 0 и l и принимая во вниманіе, что y одинаково при обоихъ предѣлахъ, имѣемъ

$$\left[{}^{x=l}_{x=0}\,Ey\right]=0=\int_0^l\int_0^l \frac{m}{I}\,dx-P\int_0^l\int_0^l \frac{x.dx}{I}+cl\ldots(11).$$

Если выполнить интегрированіе въ (10) и (11), то можно найти неизвѣстныя P и c; истинный изгибающій моментъ въ любомъ сѣченіи равенъ, какъ и прежде было указано,

$$m-Px.$$

концами загружена произвольно. Измѣряемъ x отъ конца, гдѣ закрѣпляющій моментъ равенъ m_2, тогда

$$M = m - m_2 - Px \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1),$$

$$E\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{I} - \frac{m_2}{I} - P\frac{x}{I} \dots\dots\dots\dots (2),$$

$$E\frac{dy}{dx} = \int \frac{m}{I}.dx - m_2\int\frac{dx}{I} - P\int\frac{x.dx}{I} + \text{постоянное} \dots (3).$$

Пусть $\mu = \int \frac{m}{I}\,dx$ и μ_1—полная площадь кривой $\frac{m}{I}$.

$Y = \int\frac{dx}{I}$ и Y_1—полная площадь кривой $\frac{1}{I}$.

$X = \int\frac{x.dx}{I}$ и X_1—полная площадь кривой $\frac{x}{I}$; тогда

$$0 = \mu_1 - m_2 Y_1 - PX_1 \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Интегрируя вновь, имѣемъ

$$Ey = \int \mu.dx - m_2\int Y.dx - P\int X.dx + \text{постоянное}.$$

Обозначая полныя площади, или интегралы отъ 0 до l, кривыхъ μ. Y и X черезъ M_1, Y_1 и X_1, имѣемъ

$$0 = \mathsf{M}_1 - m_2\mathsf{Y}_1 - P\mathsf{X}_1 \text{ *)} \dots\dots\dots\dots\dots (5).$$

и такъ какъ изъ (4) и (5) легко найти m_2 и P, то и (1) также извѣстно.

---

*) Мы ввели обозначенія μ, X. Y, μ_1 X_1, Y_1, M, Y, M_1, Y_1, X_1, боясь, что студенты еще недостаточно освоились съ символами анализа; быть можетъ лучше было бы вести изслѣдованіе, сохраняя соотвѣтствующую ему форму, и попросить студентовъ, чтобы они сами хорошенько освоились съ обычными символами, чѣмъ вводить одиннадцать новыхъ обозначеній.

Послѣ полученія выраженія (3) вышеуказаннымъ способомъ пишемъ далѣе такъ

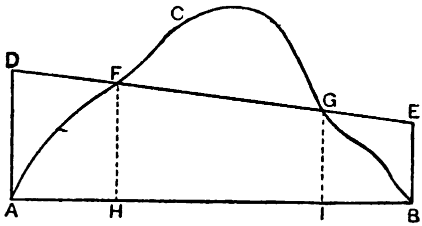
$$\left[{}_0^l\; E\frac{dy}{dx}\right] = 0 = \int_0^l \frac{m}{I}dx - m_2\int_0^l\frac{dx}{I} - P\int_0^l\frac{x.dx}{I} \dots\dots (4).$$

Интегрируя снова въ тѣхъ же предѣлахъ, имѣемъ

$$\left[{}_{x=0}^{x=l}Ey\right] = 0 = \int_0^l\int_0^l\frac{m}{I}dx - m_2\int_0^l\int_0^l\frac{dx}{I} - P\int_0^l\int_0^l\frac{xdx}{I} \dots\dots (5).$$

Если выполнить указанныя въ (4) и (5) интегрированія, то можно опредѣлить m_2 и P и подставить ихъ значенія въ (1). Студентъ долженъ самъ выбрать, чего ему держаться; пользоваться ли страшными на видъ, но въ дѣйствительности легкими для пониманія символами этого примѣчанія, или ввести одиннадцать буквъ, значенія которыхъ обыкновенно забываютъ. Смотрите также предъидущее примѣчаніе.

65. Графическій способъ. Пусть ACB (черт. 43) представляетъ m — изгибающій моментъ въ случаѣ, если бы балка свободно лежала на двухъ опорахъ; пусть AD представляетъ m_1 и BE—m_2. Проводимъ DE. Тогда разность



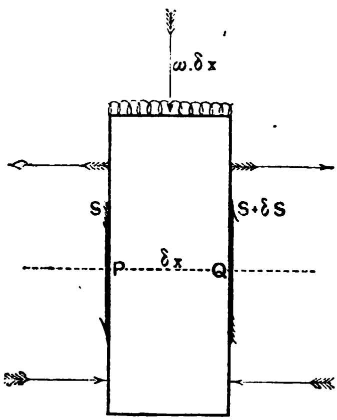
Черт. 43.

ординатъ кривой ACB и $ADEB$ представитъ дѣйствительный изгибающій моментъ, т. е. онъ изобразится вертикальными ординатами, заключенными между кривой $AFCGB$ и прямой DE. Эти послѣднія отъ A до H и отъ I до B—отрицательны, отъ H до I—положительны. F и G суть точки перегиба.

66. Полезныя аналогіи въ задачахъ на балки. Пусть w представляетъ нагрузку на единицу длины балки, M—изгибающій моментъ въ сѣченіи (положительный, если балка стремится прогнуться сверху внизъ *) и x—горизонтальное разстояніе; докажемъ, что

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w \quad \ldots (1).$$

Если въ сѣченіи P, чер. 44, отстоящемъ вправо отъ нѣкотораго начала на величину x, проявляется изгибающій моментъ M, обозначенный двумя равными и противоположными силами съ движеніемъ противъ часовой



Черт. 44.

*) Это условіе необходимо только для слѣдующихъ общихъ выводовъ.

стрѣлки, и перерѣзывающая сила S въ направленіи, показанномъ на чертежѣ, при чемъ она положительна, если дѣйствуетъ сверху внизъ на матеріалъ вправо отъ сѣченія; если PQ обозначимъ δx, такъ что нагрузка на этой части балки между сѣченіями P и Q равна $w.\delta x$; если изгибающій моментъ въ сѣченіи Q равенъ $M+\delta M$, а перерѣзывающая сила $S+\delta S$, тогда для равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на разсматриваемую часть балки, должно существовать равенство

$$\delta S = w.\delta x, \text{ или } \frac{dS}{dx} = w \quad \ldots\ldots (2),$$

а беря моменты относительно Q, имѣемъ

$$M + S\,.\,\delta x + {}^1/_2 w\,(\delta x)^2 = M + \delta M,$$

или

$$\frac{\delta M}{\delta x} = S + {}^1/_3 w\,.\,\delta x,$$

а въ предѣлѣ при безконечномъ убываніи δx

$$\frac{dM}{dx} = S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

а поэтому справедливо и равенство (1).

Далѣе хорошо извѣстно, что, если въ балкѣ y есть прогибъ, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Если мы имѣемъ діаграмму, дающую въ любомъ сѣченіи величину w, или такъ называемую діаграмму нагрузки, то любой студентъ можетъ въ видѣ упражненія начертить при помощи графической статики діаграмму, дающую въ любомъ сѣченіи въ масштабѣ величину M; иначе говоря, мы можемъ очень легко графическимъ путемъ рѣшить уравненіе (1) *. Изъ (4) мы видимъ, что, если мы построимъ

* Мы обыкновенно находимъ M для балки свободно лежащей на двухъ опорахъ. Пусть онъ выраженъ кривой ACB, чер. 43. Если на самомъ дѣлѣ по концамъ будутъ изгибающіе моменты, то мы откладываемъ ихъ величины въ видѣ линій AD и BE и приводимъ DE. Алгебраическая сумма ординатъ двухъ діаграммъ даетъ дѣйствительную діаграмму изгибающаго момента.

діаграмму, дающую въ любомъ сѣченіи $\frac{M}{EI}$, то мы можемъ точно такимъ же способомъ найти величину y (придерживаясь тѣхъ же правилъ относительно масштаба), т. е. начертить видъ изогнутой балки. Всѣ инженеры должны продѣлать много такихъ упражненій.

Примѣръ. Въ любой балкѣ, лежитъ ли она на опорахъ свободно, или нѣтъ, если w постоянно, то, интегрируя (1), имѣемъ

$$\frac{dM}{dx} = b + wx \text{ и } M = a + bx + \frac{wx^2}{2} \quad \ldots (5).$$

Для опредѣленія a и b имѣются данныя въ самой задачѣ.

Возьмемъ случай балки, равномѣрно нагруженной, имѣющей одинаковое сѣченіе по длинѣ пролета и свободно лежащей на опорахъ.

Будемъ измѣрять y вверхъ отъ средины пролета и x также отъ этой точки. Тогда $M = 0$ при $x = {}^1/_2 l$ и $- {}^1/_2 l$,

$$0 = a + {}^1/_2 bl + {}^1/_8 wl^2$$

и

$$0 = a - {}^1/_2 bl + {}^1/_8 wl^2.$$

Отсюда $b = 0$, $a = - {}^1/_8 wl^2$ и (5) принимаетъ видъ

$$M = - {}^1/_8 wl^2 + {}^1/_2 wx^2 \quad \ldots\ldots (6),$$

тоже выраженіе, которымъ мы пользовались въ *примѣрѣ IV* (пунк. 60), гдѣ мы дѣлили затѣмъ M на EI и результатъ дѣленія дважды интегрировали, чтобы найти x.

Пусть i обозначаетъ $\frac{dy}{dx}$ или уклонъ въ балкѣ.

$$\text{Тогда } \frac{dy}{dx} = i, \ \frac{di}{dx} = \frac{M}{EI}, \ \frac{dM}{dx} = S, \ \frac{dS}{dx} = w,$$

и мы имѣемъ послѣдовательный рядъ кривыхъ, которыя мы можемъ получить путемъ дифференцированія y, если намъ извѣстенъ видъ изогнутой балки, или путемъ интегрированія w, если намъ извѣстна нагрузка на балкѣ. Когда извѣстно w, то есть легкій графическій способъ для нахожденія $\frac{M}{EI}$; когда извѣстно, $\frac{M}{EI}$, то мы тѣмъ же способомъ

находимъ y. Пріемы, которые, очевидно, справедливы при построеніи $\frac{M}{EI}$ по w и не требуютъ математическаго доказательства, конечно примѣнимы безъ доказательства и при построеніи y по $\frac{M}{EI}$. Итакъ площадь кривой $\frac{M}{EI}$ между ординатами при x_1 и x_2 даетъ приращеніе i между x_1 и x_2, а касательныя къ кривой, изображающей видъ изогнутой балки, въ точкахъ съ координатами x_1 и x_2 пересѣкаются въ точкѣ, лежащей на одной вертикали съ центромъ тяжести разсматриваемой части площади кривой $\frac{M}{EI}$. Такимъ образомъ полная площадь кривой $\frac{M}{EI}$ на протяженіи HJ равна приращенію $\frac{dy}{dx}$ на томъ же протяженіи, а касательныя къ балкѣ по концамъ H и I пересѣкаются въ точкѣ P, лежащей на одной вертикали съ центромъ тяжести полной площади кривой $\frac{M}{EI}$. Эти два правила должны служить исходнымъ пунктомъ для полнаго изслѣдованія вопроса о примѣнимыхъ къ балкамъ графическихъ способахъ.

Если вертикаль, проходящая черезъ центръ тяжести, находится на горизонтальномъ разстояніи HG отъ H и GJ отъ J, тогда точка P выше точки H на величину $HG \times i_{\text{н}}$, гдѣ $i_{\text{н}}$ обозначаетъ уклонъ въ точкѣ H; J выше P на величину $GJ \times i$ въ точкѣ J, отсюда J выше на величину

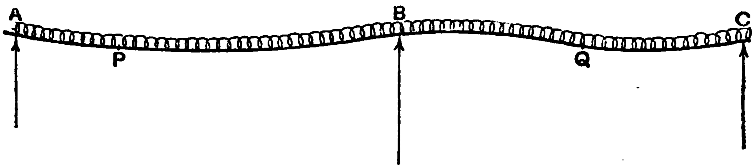
$$HG . i_{\text{н}} + GJ . i_{\text{I}},$$

соотношеніе, которое можетъ быть очень полезно, когда даны относительныя высоты опоръ, какъ это встрѣчается въ задачахъ на неразрѣзныя балки.

67. Теорема трехъ моментовъ. Съ нѣкотораго времени желѣзнодорожные инженеры вмѣсто того, чтобы пользоваться отдѣльными (разрѣзными) фермами для пролетовъ моста, стали соединять смежные концы фермъ, чтобы помѣшать ихъ поднятію, и такимъ образомъ сдѣлали то, что назы-

вается **неразрѣзными фермами**. Легко показать, что, если опорныя точки абсолютно точно могутъ сохранить свое положеніе, то неразрѣзныя фермы гораздо дешевле разрѣзныхъ. Къ несчастью, сравнительно малая осадка одной изъ опоръ совершенно мѣняетъ положеніе вещей. Во многихъ другихъ отдѣлахъ прикладной механики точно также бываетъ трудно рѣшить, чему отдать предпочтеніе, дешевизнѣ ли съ нѣкоторою неточностью, или же большимъ затратамъ, но за то съ точностью. Такъ напримѣръ, въ заклепочныхъ соединеніяхъ гораздо больше неопредѣленности въ распредѣленіи дѣйствующихъ силъ, чѣмъ въ болтовыхъ, а потому послѣднимъ отдается предпочтеніе, хотя, если бы мы могли быть вполнѣ увѣрены въ своихъ выводахъ, то одинаковой прочности заклепочное сооруженіе обошлось бы гораздо дешевле.

Студенты, интересующіеся теоріей неразрѣзныхъ балокъ, хорошо сдѣлаютъ, если прочтутъ статью, напечатанную въ *Proceedings of the Royal Society* 199, 1879, гдѣ они найдутъ графическій способъ рѣшенія самыхъ общихъ задачъ †. Я здѣсь изложу хорошій для практики примѣръ расчета балки, состоящей изъ двухъ равныхъ пролетовъ, съ опорными точками на одномъ уровнѣ и съ одинаковымъ погоннымъ загруженіемъ каждаго пролета. Пусть ABC представляетъ линію двухпролетной фермы **первоначально прямой**, опирающейся въ точкахъ A, B и C. Обозначимъ разстоя-



Черт. 45.

ніе AB черезъ l_1, а BC черезъ l_2 и положимъ, что оба пролета загружены какъ нибудь произвольно. Обозначимъ черезъ A, B и C изгибающіе моменты въ опорныхъ точкахъ A, B и C и условимся считать ихъ положительными, если они *прогибаютъ* балку *сверху внизъ*.

Пусть m—величина изгибающаго момента въ сѣченіи P

на разстоянiи x отъ A въ томъ предположенiи, что пролеты совершенно отдѣлены другъ отъ друга. Мы уже видѣли, что, вводя по концамъ A и B пары m_1 и m_2 (стремящiяся выгнуть балку въ точкахъ A и B снизу вверхъ), мы сдѣлали то, что дѣйствительный изгибающiй моментъ въ точкѣ P будетъ именно такой же, какой былъ въ пунктѣ 61. Въ настоящемъ случаѣ $m_2 = - A$, $m_1 = - B$, и поэтому изгибающiй моментъ въ точкѣ P будетъ

$$m + A + x\frac{B - A}{l_1} = EI\frac{d^2y}{dx^2} \quad . \; . \; . \; . \; (1),$$

гдѣ m— представляетъ изгибающiй моментъ въ случаѣ, если балка свободно лежитъ на опорахъ, и опорное давленiе въ точкѣ A уменьшено на величину

$$\frac{A - B}{l_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Принимая EI постояннымъ и интегрируя относительно x, имѣемъ

$$\int m.dx + Ax + {}^1/_2 x^2\frac{B - A}{l_1} + c_1 = EI.\frac{dy}{dx} \; . \; (3)$$

Пользуясь знакомъ $\int\int m.dx.dx$, чтобы обозначить интегрированiе кривой, представляющей $\int m.dx$, имѣемъ

$$\int\int m.dx.dx + {}^1/_2 Ax^2 + {}^1/_6 x^3\frac{B - A}{l_1} + c_1x + e = EI.y \; . \; . \; . \; (4).$$

Такъ какъ $y = 0$ при $x = 0$, то, очевидно, $\int\int m.dx.dx = 0$ при $x = 0$, и e также равно 0. Далѣе $y = 0$ при $x = l_1$. Пользуясь символомъ μ_1 для обозначенiя суммы $\int\int m.dx.dx$, распространенной по всему пролету, имѣемъ

$$\mu_1 + {}^1/_2 Al_1^2 + {}^1/_6 l_1^2 (B - A) + c_1l_1 = 0 \; . \; . \; . \; (5)$$

Вычислимъ изъ (3) величину $EI\frac{dy}{dx}$ въ точкѣ B и обозначимъ буквой a_1 площадь кривой m по всему пролету

или $\int_0^{l_1} m \,.\, dx$, тогда величина $EI\frac{dy}{dx}$ въ точкѣ B будетъ

$$a_1 + Al_1 + {}^1/_2 l_1 (B - A) + c_1 \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Но въ любой точкѣ Q второго пролета, обозначивъ BQ черезъ x, мы получили бы такія же уравненія, какъ (1), (3) и (4) съ тою лишь разницей, что пришлось бы замѣнить букву A буквою B, B замѣнить C и постоянное обозначить c_2. Итакъ, производя эту замѣну въ (3) и находя $EI\frac{dy}{dx}$ въ точкѣ B, гдѣ $x = 0$, получимъ, что (6) равно c_2, или

$$c_2 - c_1 = a_1 + Al_1 + {}^1/_2 l_1 (B - A) \; . \; . \; . \; (7),$$

а вмѣсто (5) мы имѣемъ

$$\mu_2 + {}^1/_2 Bl_2^2 + {}^1/_6 l_2^2 (C - B) + c_2 l_2 = 0 \; . \; . \; . \; (8).$$

Вычитая (5) изъ (8), раздѣливъ предварительно (5) на l_1, а (8) на l_2 имѣемъ

$$c_2 - c_1 = \frac{\mu_1}{l_1} - \frac{\mu_2}{l_2} + {}^1/_2 Al_1 - {}^1/_2 Bl_2 + {}^1/_6 l_1 (B - A) -$$

$$- {}^1/_6 l_2 (C - B) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Приравнивая (7) и (9), получаемъ

$$Al_1 + 2B(l_1 + l_2) + Cl_2 = 6\left(\frac{\mu_1}{l_1} - a_1 - \frac{\mu_2}{l_1}\right) \; . \; . \; . \; (10),$$

уравненіе, связывающее A, B и C, изгибающіе моменты въ трехъ послѣдовательныхъ опорныхъ точкахъ. Если мы имѣемъ любое число опоръ, и въ крайнихъ изгибающій моментъ равенъ 0, такъ какъ тамъ ферма свободно лежитъ на опорахъ, или, если намъ даны два условія для нахожденія моментовъ въ этихъ опорахъ, когда ферма по концамъ совершенно или только частью закрѣплена, то, составляя для каждыхъ трехъ послѣдовательныхъ опоръ уравненіе (10), мы получаемъ достаточное число уравненій для опредѣленія всѣхъ изгибающихъ моментовъ на опорахъ.

Примѣръ. Пусть въ двухъ смежныхъ пролетахъ l_1 и l_2 погонныя нагрузки на единицу длины будутъ w_1 и w_2; тогда

$$m = {}^1/_2 wlx - {}^1/_2 wx^2, \quad \int m\,.\,dx = {}^1/_4 wlx^2 - {}^1/_6 wx^3,$$

отсюда $a_1 = \frac{w_1}{12} l_1^3$ и $\int\int m\,.\,dx\,.\,dx = {}^1/_{12} wlx^3 - {}^1/_{24} wx^4.$

$$\mu_1 = {}^1/_{24} w_1 l_1^4, \quad \mu_2 = {}^1/_{24} w_2 l_2^4.$$

Далѣе $\frac{\mu_2}{l_2} + a_1 - \frac{\mu_1}{l_1}$ обращается въ ${}^1/_{24} w_2 l_2^3 + \frac{w_1}{12} l_1^3 - {}^1/_{24} w_1 l_1^3$,

или $${}^1/_{24}\,(w_2 l_2^3 + w_1 l_1^3),$$

а потому въ этомъ случаѣ теорема даетъ слѣдующее уравненіе

$$Al_1 + 2B\,(l_1 + l_2) + Cl_2 + {}^1/_4\,(w_2 l_2^3 + w_1 l_1^3) = 0 \ldots (10).$$

Если пролеты равны и одинаково загружены, то

$$A + 4B + C + {}^1/_2 wl^2 = 0 \ldots\ldots (11).$$

Случай. 1. Балка одинаковаго по длинѣ сѣченія, равномѣрно нагруженная, свободно лежитъ на 3-хъ опорахъ, разстоянія между которыми равны. Въ этомъ случаѣ $A = C = 0$ и $B = -{}^1/_8 wl^2$. Величина $m = {}^1/_2 w\,(lx - x^2)$, а потому изгибающій моментъ въ точкѣ P, отстоящей отъ A на разстояніи x, равенъ

$${}^1/_2 w\,(lx - x^2) + 0 - \frac{x}{l}\,{}^1/_8 wl^2.$$

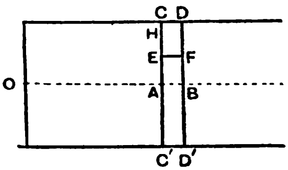
Опорное давленіе въ A уменьшается сравнительно съ тѣмъ, какимъ оно было бы, если бы часть балки AB была отдѣлена, на величину, даваемую выраженіемъ (2), т. е. на $\frac{A - B}{l_1}$ или на ${}^1/_8 wl$. Но оно было равно ${}^1/_2 wl$, а потому въ дѣйствительности оно будетъ равно ${}^3/_8 wl$ на каждой изъ крайнихъ опоръ, и, такъ какъ вся нагрузка равна $2wl$, то на среднюю опору остается ${}^{10}/_8 wl$.

Случай 2. Балка, одинаковаго по длинѣ сѣченія. равномѣрно нагруженная, свободно лежитъ на 4-хъ опорахъ, разстоянія между которыми равны. Изгибающіе моменты въ опорныхъ точкахъ обозначимъ черезъ A, B, C и D. Въ данномъ случаѣ $A = D = 0$, а по симметріи $B = C$. Такимъ образомъ выраженіе (11) даетъ намъ слѣдующее:

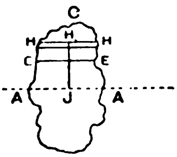
$$0 + 5B + {}^1/_2 wl^2 = 0, \text{ или } B = C = -{}^1/_{10} wl^2.$$

Еслибы часть балки AB была отдѣлена, то давленіе въ первой опорѣ было бы ${}^1/_2 wl$, а теперь оно будетъ ${}^1/_2 wl - {}^1/_{10} wl = {}^4/_{10} wl$. Опорное давленіе въ D также равно ${}^4/_{10} wl$. На другія двѣ опоры передается поровну остальная часть полной нагрузки, равной $3wl$, такъ что на каждую приходится по ${}^{11}/_{10} wl$. Итакъ опорныя давленія будутъ ${}^4/_{10} wl$, ${}^{11}/_{10} wl$, ${}^{11}/_{10} wl$ и ${}^4/_{10} wl$.

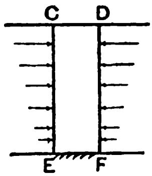
68. Перерѣзывающее усиліе въ балкахъ. Пусть разстояніе, измѣренное отъ нѣкотораго сѣченія балки, положимъ въ O (черт. 46), до нѣкотораго другого въ A будетъ x, и



Черт. 46.



Черт. 47.



Черт. 48.

пусть $OB = x + \delta x$. Пусть изгибающій моментъ въ CAC' будетъ M, а въ DBD' — $M + \delta M$; OAB (черт. 46) и AA (черт. 47) представляютъ нейтральную плоскость. Мы желаемъ знать тангенціальное или перерѣзывающее напряженіе f въ E на плоскости CAC'. Извѣстно, что это есть то же самое, что и тангенціальное напряженіе въ направленіи EF на плоскости EF, которая составляетъ прямой уголъ съ плоскостью бумаги и параллельна нейтральной плоскости AB. Разсмотримъ равновѣсіе части балки $ECDF$ или ECE на черт. 47, увеличенной на черт. 48. Мы указали на чертежѣ только силы параллельныя нейтральной плоскости и дѣйствующія подъ прямымъ угломъ къ сѣченіямъ. *Совокупность сдвигающихъ силъ, дѣйствующихъ на плоскость DF больше совокупности сдвигающихъ силъ, дѣйствующихъ на плоскость CE, и тангенціальныя силы, дѣйствующія по EF, составляютъ ихъ разность.* Намъ только нужно представить это математически и тогда наша задача рѣшена.

Въ мѣстѣ H на плоскости CAC' на разстояніи y отъ

нейтральной плоскости сжимающее напряженіе, какъ извѣстно, равно $p = \frac{M}{I} y$, и, если b ширина сѣченія HH въ данномъ мѣстѣ (черт. 47), то полная сдвигающая сила, дѣйствующая на плоскость ECE, равна

$$P = \int_{AE}^{AC} b \frac{M}{I} y \,.\, dy \quad \text{или} \quad P = \frac{M}{I} \int_{AE}^{AC} by \,.\, dy \ldots (1).$$

Замѣтимъ, что, если b перемѣнная величина, то мы должны знать ее, какъ функцію y, прежде чѣмъ произвести интегрированіе въ (1). Обозначимъ полную сдвигающую силу, дѣйствующую на EC черезъ P, тогда на плоскость DF будетъ дѣйствовать полная сдвигающая сила $P + \delta x \frac{dP}{dx}$. Тангенціальная сила, дѣйствующая на площадь $EF = f \times$ площадь EF или $f \,.\, \delta x \,.\, EE$ и отсюда

$$f \,.\, \delta x \,.\, EE = \delta x \frac{dP}{dx} \quad \text{или} \quad f = \frac{1}{EE} \cdot \frac{dP}{dx} \quad \ldots (2).$$

Примѣръ. **Балка, одинаковаго по длинѣ прямоугольнаго сѣченія** постоянной ширины b и высоты d. Въ этомъ случаѣ

$$P = \frac{12Mb}{bd^3} \int_{AE}^{^1/_2 d} y \,.\, dy = \frac{12M}{d^3} \Big[{}^1/_2 y^2 \Big]_{AE}^{^1/_2 d},$$

$$P = \frac{6M}{d^3} ({}^1/_4 d^2 - AE^2),$$

и отсюда

$$f = \frac{1}{b} \cdot \frac{6}{d^3} ({}^1/_4 d^2 - AE^2) \frac{dM}{dx} \quad \ldots\ldots (3);$$

такъ что f извѣстно, коль скоро извѣстенъ M.

Что касается до M, то возьмемъ напримѣръ, случай **бруса, свободно лежащаго на двухъ опорахъ со сплошной равномѣрной нагрузкой** w на единицу длины балки. Мы видѣли, что въ этомъ случаѣ, если x — разстояніе отъ середины,

$$M = {}^1/_8 wl^2 - {}^1/_2 wx^2.$$

Отсюда $\frac{dM}{dx} = -wx$, такъ что (3) принимаетъ видъ

$$f = \frac{-6}{bd^3} (^1/_4 d^2 - AE^2) wx \quad . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Мы можемъ теперь обозначить буквой y разстояніе AE и видимъ, что въ нѣкоторой точкѣ балки, отстоящей отъ средины ея на горизонтальное разстояніе x дюймовъ и отъ нейтральной оси на разстояніе y дюймовъ, перерѣзывающее напряженіе равно

$$f = -\frac{6w}{bd^3} (^1/_4 d^2 - y^2)\, x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Знакъ — обозначаетъ, что часть балки ниже EF дѣйствуетъ на часть ея выше EF въ противоположную сторону сравнительно съ тѣмъ направленіемъ, которое показано стрѣлкой на EF, черт. 48.

Замѣтимъ, что тамъ, гдѣ $y = 0$, т. е. въ нейтральной плоскости перерѣзывающее напряженіе больше, чѣмъ во всякой другой точкѣ того же сѣченія. Перерѣзывающее напряженіе $= 0$ въ C. Затѣмъ, концевыя сѣченія балки испытываютъ наибольшее скалывающее напряженіе. Для студента было бы очень полезно хорошенько подумать надъ выводомъ (5). Интересно найти направленія и величины главныхъ напряженій въ каждой точкѣ балки, т. е. тѣ взаимно перпендикулярныя плоскости въ каждой точкѣ, на которыя дѣйствуютъ только сжимающія или вытягивающія напряженія безъ тангенціальныхъ силъ.

Мы разсматривали прямоугольное сѣченіе. Студентъ долженъ продѣлать упражненія и съ другими сѣченіями, коль скоро ему удастся проинтегрировать by относительно y въ (1), гдѣ b есть нѣкоторая функція y. Онъ долженъ замѣтить, что интегралъ $\int_{AE}^{AC} by \,.\, dy$ равенъ площади $EHCHE$ на черт. 47, умноженной на разстояніе ея центра тяжести отъ AA.

Беря двутавровое сѣченіе, студентъ убѣдится, что f ничтожно въ его полкахъ и становится большимъ въ вертикальной стѣнкѣ. Даже въ прямоугольномъ сѣченіи f быстро уменьшается по мѣрѣ удаленія отъ нейтральной линіи, но, чтобы получить его величину въ первомъ случаѣ, мы должны дѣлить его на ширину сѣченія, и эта ширина въ пол-

кахъ сравнительно настолько велика, что на практикѣ можно считать, что въ нихъ нѣтъ перерѣзывающихъ напряженій и что послѣднія сосредоточены въ вертикальной стѣнкѣ. Студентъ уже знаетъ, что мы обыкновенно расчитываемъ площади сѣченій полокъ или верхнихъ и нижнихъ поясовъ фермъ въ предположеніи, что они сопротивляются однимъ сжимающимъ и вытягивающимъ усиліямъ, а вертикальныя стѣнки или діагональныя связи расчитываемъ только на перерѣзываніе.

Онъ замѣтитъ, что перерѣзываніе въ сѣченіи становится большимъ только тамъ, гдѣ $\frac{dM}{dx}$ или вѣрнѣе $\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{I}\right)$ велико. Но, такъ какъ въ пунктѣ 66 мы видѣли, что $\frac{dM}{dx}=S$, полной перерѣзывающей силѣ въ этомъ сѣченіи, то нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что мы нашли, что дѣйствительное перерѣзывающее напряженіе въ сѣченіи зависитъ отъ $\frac{dM}{dx}$. Въ балкѣ, равномѣрно загруженной, $\frac{dM}{dx}$ наибольшее по концамъ и дѣлается все меньше и меньше по направленію къ серединѣ, гдѣ оно мѣняетъ знакъ, поэтому связи фермы, нагруженной только собственнымъ вѣсомъ, гораздо слабѣе по серединѣ, чѣмъ по концамъ.

Прогибъ балокъ. Если въ нѣкоторомъ сѣченіи балки дѣйствуетъ изгибающій моментъ M, то въ части длины ея δx работа деформаціи будетъ $\frac{1}{2}\frac{M^2\delta x}{EI}$, такъ какъ $\frac{M\delta x}{EI}$ есть угловое измѣненіе (см. пунктъ 26), и потому полная работа деформаціи въ балкѣ, вызванная изгибающимъ моментомъ, равна:

$$\frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{I}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Если f есть перерѣзывающее напряженіе, то работа деформаціи отъ перерѣзыванія на единицу объема будетъ $\frac{f^2}{2N}$ ......(7), и помощью сложенія мы можемъ найти ея полную величину для всей балки.

Если приравнять работу деформаціи произведенію грузовъ на половину перемѣщеній, произведенныхъ ими, то мы получимъ интересныя соотношенія. Такъ, въ балкѣ длиною l, прямоугольнаго сѣченія, закрѣпленной однимъ концомъ и нагруженной на другомъ

концѣ грузомъ W, моментъ на разстояніи x отъ конца $M = Wx$, и работа отъ изгиба равна

$$\frac{1}{2E}\int_0^l \frac{W^2x^2}{I}\,dx = \frac{W^2l^3}{6EI} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Вышеприведенное выраженіе (5) даетъ для перерѣзывающаго напряженія

$$f = \frac{1}{b}\ \frac{6}{d^3}\,({}^1/_4 d^2 - y^2)\ W \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Соотвѣтствующая работа въ элементарномъ объемѣ $b\delta x.\delta y$ равна $\frac{b\delta x\delta y f^2}{2N}$. Интегрируя это выраженіе относительно y въ предѣлахъ отъ $-\frac{d}{2}$ до $+\frac{d}{2}$, мы находимъ, что рабста въ части балки длиною δx равна

$$\frac{3W^2l\delta x}{5Nbd},$$

такъ что полная работа деформаціи отъ перерѣзыванія въ балкѣ равна $\frac{3W^2l}{5Nbd}$ . . . . (10).

Если грузъ W производитъ въ концѣ балки прогибъ z, то произведенная имъ работа будетъ ${}^1/_2 Wz$ . . . . (11).

Приравнивая (11) суммѣ (8) и (10), находимъ

$$z = \frac{Wl^3}{3EI} + {}^6/_5\ \frac{Wl}{Nbd} \ldots\ldots\ldots (12).$$

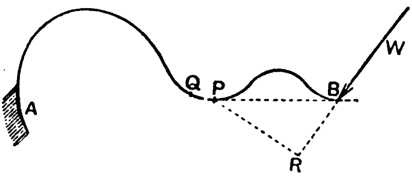
Замѣтимъ, что первая часть этого выраженія, соотвѣтствующая изгибу, равна прогибу, подсчитанному въ пунктѣ 60, прим. I. Мы увѣрены, что вторая часть, соотвѣтствующая перерѣзыванію, еще никогда не вычислялась.

Если прогибъ, соотвѣтствующій изгибу, есть z_1, и перерѣзыванію z_2, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10Nl_2}{3Ed^2}.$$

Принимая $N = {}^2/_5 E$, что очень близко къ истинѣ, получаемъ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4l^2}{3d^2}$. Если балка имѣетъ высоту 10 дюймовъ, а ея длина 8·6 дюйм., то прогибы, соотвѣтствующіе изгибу и перерѣзыванію, равны. Когда ея длина равна 86 дюйм., тогда прогибъ, соотвѣтствующій изгибу въ 100 разъ болѣе прогиба отъ перерѣзыванія. Когда ея длина равна 0·79 дюйма, то прогибъ ея отъ изгиба $= \frac{1}{100}$ прогиба отъ перерѣзыванія. Вѣроятно, однако, что принятые нами законы изгиба не приложимы къ такой короткой балкѣ.

69. Изгибъ пружинъ. Пусть черт. 49 изображаетъ осевую линію пружины, *закрѣпленной* въ A и нагруженной въ A небольшимъ грузомъ W, дѣйствующимъ въ указанномъ направленіи. Найдемъ величину прогиба въ B. Предполагается, что грузъ и прогибъ очень малы. Разсмотримъ часть пружины между двумя сѣченіями P и Q. Пусть $PQ = \delta s$, а длину пружины между A и P назовемъ s.



Черт. 49.

Изгибающій моментъ въ P равенъ $W.PR$ или $W.x$, если x длина перпендикуляра, опущеннаго изъ P на направленіе W. Назовемъ $AR—y$. Разсмотримъ сначала ту часть движенія B, которая вызывается измѣненіемъ вида *только* QP, т. е. представимъ себѣ. что AQ совершенно несгибаемо, а PB также не гнущійся указатель. Такъ какъ сѣченіе Q закрѣплено, то сѣченіе P подвергается угловому перемѣщенію равному $\delta s \times$ измѣреніе кривизны въ этомъ сѣченіи или $\delta s . \frac{M}{EI}$ или $\frac{\delta s . Wx}{EI}$ . . . . (1), гдѣ E модуль Юнга, а I моментъ инерціи поперечнаго сѣченія. Движеніе точки B, вызванное этимъ, будетъ такое же, какъ если бы PB былъ прямой указатель; итакъ указатель PB описываетъ уголъ, и перемѣщеніе B равно этому углу, умноженному на длину прямой PB или

$$\frac{\delta s . Wx}{EI} . PB \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Теперь, какъ же велико перемѣщеніе B по направленію W? Оно равно его полному перемѣщенію $\times \frac{PR}{PB}$ или $\times \frac{x}{PB}$, и отсюда перемѣщеніе B по направленію W равно

$$\frac{\delta s \,.\, Wx^2}{EI} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что перемѣщеніе B по направленію перпендикулярному къ W равно

$$\frac{\delta s \,.\, Wxy}{EI} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Въ самыхъ общихъ случаяхъ легко найти интегралы (3) и (4) графически.

Мы обыкновенно дѣлимъ полную длину пружины отъ B до A на большое число равныхъ частей δs, и такимъ образомъ должны умножить $\frac{s \,.\, W}{E}$ (если s будетъ полная длина пружины) на среднія величины $\frac{x^2}{I}$ и $\frac{xy}{I}$ для каждой такой части. Хорошо сдѣланная пружина должна вездѣ испытывать одинаковое напряженіе, такимъ образомъ, если b ширина ея по направленію перпендикулярному къ плоскости бумаги и t ея толщина, такъ что $I = \frac{bt^3}{12}$, то $\frac{6\,Wx}{bt^2} = f$ постоянному. При такихъ условіяхъ (3) и (4) обращаются въ

$$\frac{2f \,.\, \delta s}{E} \,.\, \frac{x}{t} \text{ и } \frac{2f \,.\, \delta s}{E} \,.\, \frac{y}{t}$$

И если пружина постоянна по толщинѣ, а ширина ея измѣняется пропорціонально x, то (3) обращается въ $\frac{2f \,.\, \delta s}{Et} \,.\, x$ и (4) въ $\frac{2f \,.\, \delta s}{Et} \,.\, y$.

Если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ суть координаты центра тяжести кривой (см. пунк. 48), то

$\frac{2fs\overline{x}}{Et}$ есть полный прогибъ по направленію W.

$\frac{2fs\overline{y}}{Et}$ — полный прогибъ по направленію перпендикулярному къ W.

70. Упражненія. Кривизна кривой равна

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \text{. (см. пунктъ 224).}$$

Когда уравненіе кривой дано, то легко найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ и вычислить $\frac{1}{r}$, гдѣ r есть радіусъ кривизны. Такъ какъ здѣсь даются просто задачи для упражненія, то и нѣтъ необходимости предварительно доказывать, что эта формула для кривизны вѣрна.

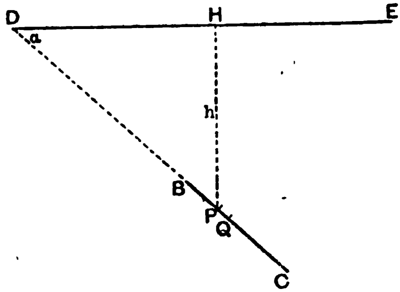
1. Найти кривизну параболы $y = ax^2$ въ точкѣ $x = 0$, $y = 0$.

2. Уравненіе изогнутой балки, свободно лежащей на двухъ опорахъ, при сплошной равномѣрной нагрузкѣ имѣетъ видъ $y = \frac{w}{48EI}(3l^2x^2 - 2x^4)$ см. пунктъ 60, при чемъ начало координатъ въ серединѣ балки; l длина балки, w нагрузка на единицу длины, E модуль Юнга для даннаго матерьяла и I моментъ инерціи поперечнаго сѣченія. Взять $l = 200$, $w = 5$, $E = 29 \times 10^6$, $I = 80$ и найти кривизну для $x = 0$. Показать, что въ этомъ случаѣ величиной $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ можно пренебречь сравнительно съ 1, и что поэтому кривизна можетъ быть представлена помощью $\frac{d^2y}{dx^2}$. Показать, что изгибающій моментъ вышеприведенной балки равенъ $M = \frac{w}{8EI}(l^2 - 4x^2)$, и что онъ имѣетъ наибольшее значеніе по серединѣ балки.

3. Найти кривизну кривой $y = a \log x + bx + c$ для точки $x = x_1$.

71. Давленіе жидкостей. *Упражненіе* 1. Доказать, что если p, давленіе жидкости, постоянно, то равнодѣйствую-

щая всѣхъ силъ давленія на площадь A равна Ap и дѣйствуетъ въ центрѣ ея.



Черт. 50.

2. Давленіе въ жидкости на глубинѣ h равно wh, гдѣ w есть вѣсъ единицы объема; чему равно полное давленіе ея на нѣкоторую погруженную въ нее площадь? Пусть DE—поверхность, отъ которой измѣряется глубина h, и гдѣ давленіе $=0$. Пусть BC вертикальный разрѣзъ плоскости. Представимъ себѣ плоскость продолженной до пересѣченія съ уровнемъ поверхности жидкости DE въ точкѣ D. Назовемъ уголъ EDC — α. Пусть разстояніе DP будетъ x, а DQ — $x+\delta x$. Ширину площади въ точкѣ P въ направленіи перпендикулярномъ къ плоскости бумаги назовемъ z. На кв. ед. элемента площади $z \,.\, \delta x$ давленіе будетъ wh, если $h = PH$ есть глубина точки P, но $h = x \sin \alpha$, поэтому полное давленіе на полоску $z\delta x$ равно

$$wx \,.\, \sin\alpha \,.\, z \,.\, \delta x,$$

а давленіе на всю площадь

$$F = w \sin\alpha \int_{DB}^{DC} x \,.\, z \,.\, dx \,.\,.\,.\,.\,.\ (1).$$

Если равнодѣйствующая давленія дѣйствуетъ въ точкѣ, находящейся на разстояніи X отъ D, то, беря моменты относительно D, получимъ

$$FX = w \sin\alpha \int_{DB}^{DC} x^2 \,.\, z \,.\, dx \,.\,.\,.\ (2).$$

Замѣтимъ, что (1) $\int_{DB}^{DC} x \,.\, z \,.\, dx = A\bar{x}$.

если A есть полная площадь, и $\bar{x}$ разстояніе ея центра тяжести отъ D. Отсюда, **среднее давленіе на площадь есть давленіе въ центрѣ тяжести ея.**

$$m = {}^1/_2 wlx - {}^1/_2 wx^2, \quad \int m\,.\,dx = {}^1/_4 wlx^2 - {}^1/_6 wx^3,$$

отсюда $a_1 = \frac{w_1}{12} l_1{}^3$ и $\int\int m\,.\,dx\,.\,dx = {}^1/_{12} wlx^3 - {}^1/_{24} wx^4$.

$$\mu_1 = {}^1/_{24} w_1 l_1{}^4, \quad \mu_2 = {}^1/_{24} w_2 l_2{}^4.$$

Далѣе $\frac{\mu_2}{l_2} + a_1 - \frac{\mu_1}{l_1}$ обращается въ ${}^1/_{24} w_2 l_2{}^3 + \frac{w_1}{12} l_1{}^3 - {}^1/_{24} w_1 l_1{}^3$,

или $\qquad {}^1/_{24}\,(w_2 l_2{}^3 + w_1 l_1{}^3)$,

а потому въ этомъ случаѣ теорема даетъ слѣдующее уравненіе

$$Al_1 + 2B(l_1 + l_2) + Cl_2 + {}^1/_4\,(w_2 l_2{}^3 + w_1 l_1{}^3) = 0 \ldots (10).$$

Если пролеты равны и одинаково загружены, то

$$A + 4B + C + {}^1/_2 wl^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (11).$$

Случай. 1. Балка одинаковаго по длинѣ сѣченія, равномѣрно нагруженная, свободно лежитъ на 3-хъ опорахъ, разстоянія между которыми равны. Въ этомъ случаѣ $A = C = 0$ и $B = -{}^1/_8 wl^2$. Величина $m = {}^1/_2 w\,(lx - x^2)$, а потому изгибающій моментъ въ точкѣ P, отстоящей отъ A на разстояніи x, равенъ

$$^1/_2 w\,(lx - x^2) + 0 - \frac{x}{l}\,{}^1/_8 wl^2.$$

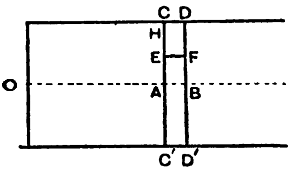
Опорное давленіе въ A уменьшается сравнительно съ тѣмъ, какимъ оно было бы, если бы часть балки AB была отдѣлена, на величину, даваемую выраженіемъ (2), т. е. на $\frac{A - B}{l_1}$ или на ${}^1/_8 wl$. Но оно было равно ${}^1/_2 wl$, а потому въ дѣйствительности оно будетъ равно ${}^3/_8 wl$ на каждой изъ крайнихъ опоръ, и, такъ какъ вся нагрузка равна $2wl$, то на среднюю опору остается ${}^{10}/_8 wl$.

Случай 2. Балка, одинаковаго по длинѣ сѣченія, равномѣрно нагруженная, свободно лежитъ на 4-хъ опорахъ, разстоянія между которыми равны. Изгибающіе моменты въ опорныхъ точкахъ обозначимъ черезъ A, B, C и D. Въ данномъ случаѣ $A = D = 0$, а по симметріи $B = C$. Такимъ образомъ выраженіе (11) даетъ намъ слѣдующее:

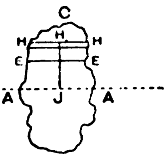
$$0+5B+{}^1/_2wl^2=0, \text{ или } B=C=-{}^1/_{10}wl^2.$$

Еслибы часть балки AB была отдѣлена, то давленіе въ первой опорѣ было бы ${}^1/_2wl$, а теперь оно будетъ ${}^1/_2wl-{}^1/_{10}wl=$ $={}^4/_{10}wl$. Опорное давленіе въ D также равно ${}^4/_{10}wl$. На другія двѣ опоры передается поровну остальная часть полной нагрузки, равной $3wl$, такъ что на каждую приходится по ${}^{11}/_{10}wl$. Итакъ опорныя давленія будутъ ${}^4/_{10}wl$, ${}^{11}/_{10}wl$, ${}^{11}/_{10}wl$ и ${}^4/_{10}wl$.

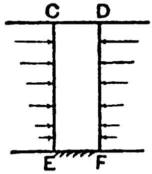
68. Перерѣзывающее усиліе въ балкахъ. Пусть разстояніе, измѣренное отъ нѣкотораго сѣченія балки, положимъ въ O (черт. 46), до нѣкотораго другого въ A будетъ x, и



Черт. 46.



Черт. 47.



Черт. 48.

пусть $OB=x+\delta x$. Пусть изгибающій моментъ въ CAC' будетъ M, а въ DBD' — $M+\delta M$; OAB (черт. 46) и AA (черт. 47) представляютъ нейтральную плоскость. Мы желаемъ знать тангенціальное или перерѣзывающее напряженіе f въ E на плоскости CAC'. Извѣстно, что это есть то же самое, что и тангенціальное напряженіе въ направленіи EF на плоскости EF, которая составляетъ прямой уголъ съ плоскостью бумаги и параллельна нейтральной плоскости AB. Разсмотримъ равновѣсіе части балки $ECDF$ или ECE на черт. 47, увеличенной на черт. 48. Мы указали на чертежѣ только силы параллельныя нейтральной плоскости и дѣйствующія подъ прямымъ угломъ къ сѣченіямъ. *Совокупность сдвигающихъ силъ, дѣйствующихъ на плоскость DF больше совокупности сдвигающихъ силъ, дѣйствующихъ на плоскость CE, и тангенціальныя силы, дѣйствующія по EF, составляютъ ихъ разность.* Намъ только нужно представить это математически и тогда наша задача рѣшена.

Въ мѣстѣ H на плоскости CAC' на разстояніи y отъ

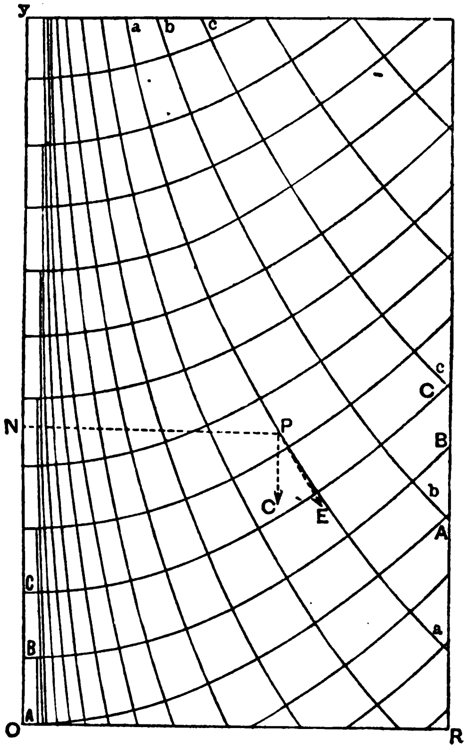
PT въ точкѣ *P* нормально, то очевидно, ея уклонъ положителенъ, такимъ образомъ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{g}x,$$

и уравненіе кривой будетъ

$$y=\frac{a^2}{2g}x^2+\text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

гдѣ постоянное зависитъ отъ того уровня, отъ котораго из



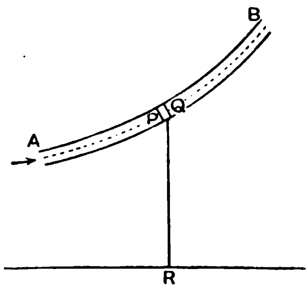
Черт. 52.

мѣряется *y*. Это — парабола, и если она вращается около

оси, то мы имѣемъ параболоидъ вращенія. Поверхность, во всякой точкѣ которой сила дѣйствуетъ къ ней нормально, называется поверхностью *уровня*, и мы видимъ, что поверхности уровня въ данномъ случаѣ представляютъ собою параболоиды вращенія. Эти поверхности называются иногда поверхностями равнаго потенціала. Легко доказать, что на такой поверхности давленіе во всякой точкѣ постоянно, и что это есть поверхность одинаковой плотности, такъ что, если ртуть, масло, вода и воздухъ находятся во вращающемся сосудѣ, то поверхности, отдѣляющія ихъ другъ отъ друга суть параболоиды вращенія.

Студентъ долженъ построить одну изъ линій силъ и вырѣзать по ней шаблонъ изъ цинковой пластинки, обрѣзавъ его съ другой стороны по оси OO. Передвигая этотъ шаблонъ по линіи OO, мы можемъ начертить нѣсколько линій силъ. Затѣмъ вырѣжемъ шаблонъ для одной изъ параболъ и при помощи его построимъ нѣсколько поверхностей уровня. Эти два ряда кривыхъ пересѣкаются вездѣ другъ съ другомъ подъ прямымъ угломъ. На черт. 52 показанъ рядъ полученныхъ результатовъ, гдѣ aa, bb, cc суть логариѳмическія линіи силъ, а AA, BB, CC параболоидальныя поверхности уровня.

73. Движеніе жидкости. Пусть AB есть вертикальный



Черт. 53.

разрѣзъ водопроводной трубы; разсмотримъ массу жидкости между сѣченіями P и Q длиною δs футъ, считая по оси струи съ поперечнымъ сѣченіемъ a кв. футъ гдѣ a и δs

въ предѣлѣ предполагаются безконечно малыми. Пусть давленіе въ P будетъ p фунт. на квадр. футъ, скорость v футъ въ секунду и пусть P находится на высотѣ h футъ надъ нѣкоторымъ даннымъ уровнемъ.

Въ сѣченіи Q соотвѣтственныя величины имѣютъ значенія $p+\delta p$, $h+\delta h$, $v+\delta v$. Пусть вѣсъ куб. фута жидкости равенъ w фунтовъ.

Найдемъ силы, дѣйствующія на эту массу въ направленіи струи, т. е. силы параллельныя струѣ.

Въ точкѣ P дѣйствуетъ сила pa въ направленіи движенія жидкости, а въ Q — сила $(p+\delta p)a$ въ противоположномъ направленіи. Вѣсъ части струи между P и Q равенъ $a.\delta s.w$, и подобно тому, какъ на наклонной плоскости, его слагающая, дѣйствующая на встрѣчу движенію, равна

$$\text{вѣсъ} \times \frac{\text{высота плоскости}}{\text{длина плоскости}} \quad \text{или} \quad a.\delta s.w.\frac{\delta h}{\delta s}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что сила, вызывающая ускореніе движенія отъ P къ Q, равна

$$pa-(p+\delta p)a-a.\delta s.w.\frac{\delta h}{\delta s}.$$

Но масса равна $\dfrac{a.\delta s.w}{g}$ а ея ускореніе есть $\dfrac{dv}{dt}$, поэтому эту силу мы должны приравнять величинѣ $\dfrac{a.\delta s.w}{g}.\dfrac{dv}{dt}$. Дѣля на a, мы получимъ

$$-\delta p-\delta s.w\frac{\delta h}{\delta s}=\frac{\delta s.w}{g}.\frac{dv}{dt}.$$

Если δt — время, потребное частицѣ для прохожденія отъ P до Q, то $v=\dfrac{\delta s}{\delta t}$, причемъ это равенство становится все болѣе точнымъ по мѣрѣ уменьшенія δs. Также ускореніе $\dfrac{dv}{dt}$ становится все болѣе близкимъ къ $\dfrac{\delta v}{\delta t}$. (Объ этомъ вопросѣ слѣдуетъ много подумать, — больше, чѣмъ это можетъ показаться необходимымъ съ перваго взгляда).

Отсюда, если δs очень мало, то $\delta s . \frac{dv}{dt} = \frac{\delta s}{\delta t} . \delta v = v . \delta v$, такъ что мы имѣемъ

$$\delta p + w . \delta h + \frac{w}{g} v . \delta v = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

или, если мы желаемъ выразить, что это уравненіе становится все болѣе близкимъ къ истинѣ по мѣрѣ уменьшенія δs, мы можемъ написать его въ такомъ видѣ:

$$\frac{dp}{w} + dh + \frac{v}{g} . dv = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)^*,$$

интегрируя получимъ

$$h + \frac{v^2}{2g} + \int \frac{dp}{w} = \text{постоянному}. \; . \; . \; . \; (2).$$

Мы оставляемъ знакъ интеграла при $\frac{dp}{w}$, такъ какъ w можетъ измѣняться. Для жидкости съ постояннымъ w, будетъ

$$h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{w} = \text{постоянному}. \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

74. Въ газѣ мы имѣемъ $w \propto p$, если температура сохраняется постоянной, или при адіабатическомъ теченіи $w \propto p^{1/\gamma}$, гдѣ γ — хорошо извѣстное отношеніе удѣльныхъ

---

* На основаніи нашего маленькаго опыта съ уравненіями, заключающими въ себѣ величины, подобныя δp и друг., мы уже знаемъ, что эти уравненія становятся вѣрными только тогда, когда мы предполагаемъ δp и друг. безконечно убывающими, и потому мы можемъ отношенія этихъ величинъ писать къ видѣ $\frac{dp}{dh}$ и т. д., и мы можемъ принять за правило писать dp и т. д. вмѣсто δp и друг.

Также, если $\quad f(x) . dx + F(y) dy + \varphi(z) dz = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$

то $\quad \int f(x) . dx + \int F(y) . dy + \int \varphi(z) . dz = \text{постоянному}. \; . \; . \; (2).$

Здѣсь опять никакой ошибки не заключается въ томъ, что мы почленно интегрируемъ уравненіе подобное (1).

теплоемкостей. Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ легко найти $\int \frac{dp}{w}$ и выразить законъ. Этотъ законъ имѣетъ универсальное значеніе во всѣхъ случаяхъ, гдѣ можно пренебречь вязкостью, и представляетъ огромную важность для инженера гидротехника.

Такъ въ случаѣ адіабатическаго теченія $w = cp^{1/\gamma}$, интегралъ $\frac{dp}{w}$ равенъ $\int \frac{dp}{cp^{1/\gamma}}$ или $\frac{1}{c}\int p^{-1/\gamma}\,dp$ или $\frac{1}{c}\;\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,p^{1-1/\gamma}$,

и отсюда, если черезъ s обозначить величину $\frac{\gamma - 1}{\gamma}$, то получимъ

$$h + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{cs}p^s = \text{постоянному} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Въ большинствѣ задачъ измѣненія уровня незначительны и мы можемъ часто пользоваться для газовъ формулой

$$v^2 + \frac{2g}{cs}p^s = \text{постоянному} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Такъ если p_0 есть давленіе и w_0 вѣсъ куб. фута газа внутри сосуда въ мѣстахъ, гдѣ скорость равна 0 и, если въ выходномъ отверстіи давленіе равно p, то постоянное въ (4) равно, очевидно, $0 + \frac{2g}{cs}p^s{}_0$, и отсюда на поверхности выходного отверстія $v^2 = \frac{2g}{cs}(p_0{}^s - p^s) \ldots (5)$.

и, такъ какъ c равно $\frac{w_0}{p_0{}^{1/\gamma}}$, то изъ этого уравненія легко получить въ различныхъ случаяхъ количество газа, вытекающаго въ секунду.

Замѣтимъ, что, если p очень немногимъ меньше p_0, то, если мы воспользуемся приблизительной формулой $(1 + a)^n = 1 + na$, когда a малая величина, мы найдемъ

$$v^2 = \frac{2g}{w_0}(p_0 - p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

простое уравненіе, которое легко запомнить и примѣнить въ задачахъ, касающихся вентиляціи и вѣтряныхъ мельницъ. Въ водяной тюрбинѣ Томсона скорость колеснаго обода есть скорость, соотвѣтствующая половинѣ полезнаго давленія; также въ воздушной тюрбинѣ, когда нѣтъ большой разности давленій, скорость колеснаго обода соотвѣтствуетъ половинѣ разности давленій.

Такъ, если p_0 при входѣ равно 7000 фунт. на квадр. футъ и если p при выходѣ равно 6800 фунт., и если мы положимъ w_0 рав-

нымъ 0.28 фунта въ куб. футѣ, то скорость обода V равна при разности давленій въ 200 фунтовъ на кв. футъ

$$\sqrt{\frac{2g}{0.28}} \cdot 100 = 151 \text{ футъ въ секунду.}$$

Возвратимся къ (5). Если отверстіе имѣетъ площадь A, и теченіе направлено такъ, что струи воздуха параллельны другъ другу, то, пренебрегая треніемъ, получимъ Q—объемъ, проходящій въ секунду, равнымъ $Q = vA$, и, если давленіе равно p, то вѣсъ газа, протекающаго въ секунду равенъ

$$W = vAw,$$

или, такъ какъ $w = cp^{1/\gamma}$ и $w_0 = cp_0^{1/\gamma}$, то

$$W = vAw_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}.$$

Если студентъ подставитъ теперь сюда величину v изъ (5) и обозначитъ $\frac{p}{p_0}$ черезъ a, онъ получитъ

$$W = Aa^{1/\gamma} p_0 \sqrt{\frac{2g\gamma}{\gamma - 1} \frac{w_0}{p_0}\left(1 - a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Задача. Найти такое значеніе p для внѣшняго давленія, чтобы для даннаго внутренняго давленія истеченіе было максимальнымъ.

Очевидно, что по мѣрѣ уменьшенія p скорость v возрастаетъ а также и Q; но большее Q еще не обозначаетъ большого вѣсового количества газа. Мы желаемъ, чтобы W было велико. Когда W maximum? Т. е. какая величина a сдѣлаетъ

$$a^{2/\gamma}\left(1 - a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \text{ или } a^{2/\gamma} - a^{1+1/\gamma} \text{ maximum?}$$

Дифференцируя это относительно a и приравнивая 0, получимъ

$$\frac{2}{\gamma} a^{2/\gamma - 1} - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) a^{1/\gamma} = 0.$$

Дѣля на $a^{1/\gamma}$, мы находимъ $a = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$.

или

$$p = p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Въ случаѣ воздуха $\gamma = 1{\cdot}41$, и мы находимъ $p = 0{\cdot}527 p_0$.

Т. е. максимальное количество воздуха вытекаетъ изъ сосуда въ секунду тогда, когда внѣшнее давленіе немногимъ больше половины внутренняго.

Задача. Когда p безпредѣльно уменьшается, каково v?

$$\text{Отвѣтъ:} \quad v = \sqrt{\frac{2g\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{w_0}}$$

Эта скорость больше скорости звука въ отношеніи $\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}$, для воздуха равномъ 2·21. Т. е. предѣльная скорость въ случаѣ воздуха равна 2413 футъ секунду $\times \sqrt{\frac{t}{273}}$, гдѣ t есть абсолютная температура внутри сосуда съ полнымъ вакуумомъ извнѣ.

Студенты въ видѣ примѣра должны опредѣлить скорость истеченія въ атмосферу.

Возвращаемся къ уравненіямъ (2) и (4); мы предполагали, что h для газа имѣетъ мало значенія въ большинствѣ задачъ, представляющихся инженеру механику. Но есть много задачъ по физикѣ, въ которыхъ необходимо принять во вниманіе величину измѣненія уровня. Напримѣръ, если (2) интегрируется въ предположеніи постоянства температуры, и если мы полагаемъ v постояннымъ; то найдемъ, что p уменьшается съ увеличеніемъ h по закону сложныхъ процентовъ. (Глава II). Также, если при постоянномъ v для w будетъ адіабатическій законъ, то мы найдемъ, что p уменьшается вмѣстѣ съ h по закону, который мы можемъ выразить такъ: производная отъ температуры по h постоянна.

Эти два случая однако болѣе удобно разсмотрѣть во II главѣ.

75. Можно дать много интересныхъ примѣровъ примѣненія уравненія (2). Оно даетъ намъ возможность понять законъ истеченія жидкостей изъ отверстій, дѣйствія помпъ, притяженія легкихъ тѣлъ, вызываемаго дрожаніемъ камертона, понять, почему въ нѣкоторыхъ случаяхъ клапаны вмѣсто того, чтобы открываться подъ давленіемъ протекающей струи воды, наоборотъ, закрываются, и уяснить себѣ и многія другія весьма любопытныя явленія.

Примѣръ 1. Частицы воды въ резервуарѣ, направляясь очень медленно къ отверстію въ центрѣ, двигаются почти по окружностямъ такъ, что скорость v обратно пропорціональна разстоянію ихъ отъ центра. Примемъ $v = \frac{a}{x}$, гдѣ a — нѣкоторое постоянное и x радіусъ окружности, или раз-

стояніе частицъ отъ оси. Тогда (3) (пунктъ 73) приметъ видъ

$$h + \frac{a^2}{2gx^2} + \frac{p}{w} = C.$$

Далѣе, на поверхности воды p — постоянная величина, равная атмосферному давленію, такъ что здѣсь

$$h = c - \frac{a^2}{2gx^2}.$$

Это уравненіе даетъ намъ видъ поверхности воды. Если подберемъ какія либо величины для c и a, то легко подсчитаемъ h для любой величины x и начертимъ кривую. Если станемъ вращать эту кривую вокругъ оси, то получимъ искомую поверхность, которая представляетъ поверхность вращенія.

Примѣръ 2. Вода вращается по спирали въ горизонтальной плоскости, при чемъ скорость ея вращенія выражается равенствомъ $v = \frac{b}{x}$, гдѣ x есть разстояніе частицы воды отъ нѣкоторой центральной точки. Замѣтимъ, что

$$p = C_1 - {}^1/_2 \frac{w}{g} \frac{b^2}{x^2}.$$

Студентъ долженъ изслѣдовать измѣненіе величинъ p и v въ направленіяхъ перпендикулярныхъ къ струямъ. Онъ для этого долженъ разсмотрѣть равновѣсіе элементарной части струи PQ черт. 53, находящейся подъ дѣйствіемъ силъ давленія, центробѣжной силы и собственнаго вѣса въ направленіи нормальномъ къ направленію струи.

Онъ найдетъ, что, если черезъ $\frac{dp}{dr}$ обозначить мѣру приращенія p по направленію радіуса кривизны, считая отъ центра кривизны, и если α есть уголъ QPR черт. 53, при чемъ струя находится въ вертикальной плоскости бумаги, то

$$\frac{dp}{dr} = \frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} - w \sin \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Если всѣ струи находятся въ горизонтальныхъ плоскостяхъ, то

$$\frac{dp}{dr}=\frac{w}{g}\cdot\frac{v^2}{r}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Примѣръ 3. Всѣ струи направлены по окружностямъ и находятся въ горизонтальныхъ плоскостяхъ, такъ что h постоянно.

Если $v=\frac{b}{r}$, гдѣ b постоянно, то

$$\frac{dp}{dr}=\frac{w}{g}\cdot\frac{b^2}{r^3}.$$

$$p=-{}^1/_2\frac{w}{g}\cdot\frac{b^2}{r^2}+\text{постоянное}\ldots\ldots (3).$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что паденіе давленія по направленію радіуса, считая отъ центра, то же самое, что и въ предыдущемъ примѣрѣ. Показать, что этотъ законъ, $v=\frac{b}{r}$, долженъ быть вѣренъ тогда, когда нѣтъ «вращенія». (См. примѣръ 5).

Примѣръ 4. Жидкость вращается вокругъ оси, какъ твердое тѣло, такъ что $v=br$, тогда

$$\frac{dp}{dr}=\frac{w}{g}b^2r,$$

$$p=\frac{1}{2}\frac{w}{g}b^2r^2+c.$$

Это даетъ намъ законъ приращенія давленія въ колесѣ центробѣжнаго насоса, когда оно наполнено водой, но выпуска ея не происходитъ.

Упражненіе. Давленіе внутри колеса центробѣжнаго насоса равно 2116 фунт. на квадр. футъ, при чемъ внутренній радіусъ его равенъ 0·5 фута, а внѣшній 1 футу. Угловая скорость колеса равна $b=30$ радіановъ въ секунду; начертить кривую, показывающую законъ измѣненія p и r по направленію кнаружи, когда выпускается весьма малое количество воды. Пусть вода оставляетъ колесо, направ-

ляясь по спиральному пути, при чемъ скорость съ наружной стороны измѣняется обратно пропорціонально r, начертить кривую, показывающую законъ измѣненія p въ наружной камерѣ, гдѣ происходитъ водоворотъ.

Примѣръ 5. Выраженіе

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{1}{w}p+h=E,$$

которое остается постояннымъ по длинѣ струи, можно назвать полнымъ запасомъ энергіи 1 фунта воды въ струѣ, если движеніе установившееся.

Но $\frac{dE}{dr}=\frac{1}{g}v\frac{dv}{dr}+\frac{1}{w}\frac{dp}{dr}+\frac{dh}{dr}$, а на основаніи уравненія (1) получимъ

$$\frac{dE}{dr}=\frac{2v}{g}\times\frac{1}{2}\left(\frac{v}{r}+\frac{dv}{dr}\right).$$

Это выраженіе $\frac{1}{2}\left(\frac{v}{r}+\frac{dv}{dr}\right)$ называютъ «средней угловой скоростью» или **«вращеніемъ»** жидкости. Отсюда

$$\frac{dE}{dr}=\frac{2v}{g}\times \text{вращеніе}.$$

Когда жидкость подъ вліяніемъ силы тяжести вытекаетъ изъ большого сосуда черезъ малое отверстіе, при чемъ внутри сосуда на нѣкоторомъ разстояніи отъ отверстія мы можемъ считать, что жидкость находится въ покоѣ, то очевидно, что E одинаково для всѣхъ струй, такъ что $\frac{dE}{dr}=0$ и, слѣдовательно, «вращенія» не будетъ.

Если разсматривая истеченіе воды изъ сосуда черезъ отверстіе, мы предположимъ, что въ любомъ сѣченіи струи скорость ея нормальна къ сѣченію, и что давленіе повсюду равно атмосферному, то мы можемъ опредѣлить величину расхода. Нужно сказать, что такія предположенія не имѣютъ достаточнаго основанія. Однако, хотя они и невѣрны, мы сдѣлаемъ ихъ здѣсь, смотря на свою задачу, какъ на простое упражненіе въ интегрированіи. Такъ какъ давленіе равно атмосферному и на поверхности вода находится въ

покоѣ, то если v есть скорость нѣкоторой частицы на глубинѣ h, и a есть элементарная площадь сѣченія, то $Q=\Sigma a\sqrt{2gh}$, при чемъ суммированіе распространяется на всю площадь; Q — объемъ вытекающей воды въ секунду. Такъ, если отверстіе находится въ вертикальной плоскости, и если на глубинѣ h оно имѣетъ ширину z, то черезъ площадь $z.\delta h$ вода будетъ протекать со скоростью $\sqrt{2gh}$, такъ что объемъ воды, протекающей въ секунду, будетъ $\sqrt{2gh}.z.\delta h$, и если h_1 и h_2 суть глубины наивысшей и наименьшей точекъ отверстія, то полный расходъ будетъ $Q=$ $=\sqrt{2g}\int_{h_1}^{h_2} zh^{1/2}.dh$.

Примѣръ 6. Прямоугольное сѣченіе шириной b.

$$Q=\sqrt{2g}.b\int_{h_1}^{h_2} h^{1/2}.dh={}^2/_3 b\sqrt{2g}\left[{}_{h_1}^{h_2} h^{3/2}\right]=$$

$$={}^2/_3 b\sqrt{2g}\,(h_2^{3/2}-h_1^{3/2}).$$

Примѣръ 7. Треугольное сѣченіе, вершина угла на глубинѣ h_1, основаніе длиной b горизонтально и находится на глубинѣ h_2. Легко найти, что въ предѣлахъ интегрированія $z=\dfrac{b}{h_2-h_1}(-h_1+h)$.

Отсюда $Q=\dfrac{b\sqrt{2g}}{h_2-h_1}\int(-h_1h^{1/2}+h^{3/2})\,dh=$

$$=\frac{b\sqrt{2g}}{h_2-h_1}\left[{}_{h_1}^{h_2}(-{}^2/_3 h_1h^{3/2}+{}^2/_5 h^{5/2})\right].$$

Если отношеніе $\dfrac{h_2}{h_1}$ обозначить черезъ r, то легко найти, что

$$Q=\frac{bh_1^{3/2}}{r-1}.\frac{\sqrt{2g}}{15}(6r^{5/2}-10r^{3/2}+25).$$

Когда студентъ попрактикуется въ интегрированіи при чтеніи III главы, онъ такимъ же путемъ найдетъ гипотетическій расходъ черезъ круглыя, эллиптическія и другія сѣченія.

Возвращаясь къ прямоугольному сѣченію, замѣтимъ, что практически невозможенъ случай, когда $h_1 = 0$, но для простого упражненія примемъ $h_1 = 0$, и тогда получимъ $Q = {}^2/_3 b\sqrt{2g}h_2{}^{3/2}$. Далѣе положимъ, что вода протекаетъ черезъ прямоугольный водосливъ съ острыми ребрами, имѣющій порогъ длиной b, лежащій на глубинѣ h_2, и положимъ, что расходъ какимъ нибудь способомъ можно представить въ видѣ полученнаго выше результата, умноженнаго на нѣкоторую дробь, называемую коеффиціентомъ сжатія, тогда $Q = cb\sqrt{2g}h^{3/2}$. Это есть такъ называемая теорія истеченія черезъ прямоугольные водосливы. Точная теорія выведена профессоромъ James Thomson изъ его закона истеченія черезъ подобныя отверстія, одного изъ тѣхъ весьма немногихъ законовъ, на которые можетъ положиться инженеръ гидравликъ. Съ грустью приходится сознаваться, что почти всѣ математическіе выводы, приводимые въ лучшихъ сочиненіяхъ по гидравликѣ, носятъ вышеупомянутый характеръ, т. е. имѣютъ весьма неясную связь съ естественными явленіями.

76. Магнитное поле вокругъ прямой проволоки круглаго сѣченія. Въ ученіи объ электричествѣ есть два важныхъ закона. Они разсматриваютъ двѣ цѣпи магнитную и электрическую, которыя всегда тѣсно связаны другъ съ другомъ.

I. **Линейный интегралъ** (называемый, независимо отъ принятыхъ единицъ измѣренія, гауссажемъ) **магнитной силы по нѣкоторой сомкнутой кривой равенъ силѣ тока**, умноженной на 4π, если сила тока выражена въ такъ называемой абсолютной системѣ единицъ *C. G. S.* (любопытное свойство абсолютной системы единицъ, заставляющее вводить въ самомъ важномъ изъ законовъ множитель); и на $\frac{4\pi}{10}$, если сила тока выражена въ торговыхъ единицахъ, т. е. амперахъ.

II. **Линейный интегралъ** (называемый независимо отъ выбора системы единицъ, вольтажемъ) **электровозбудительной силы по сомкнутой кривой равенъ магнитному току** (вѣрнѣе, мѣрѣ приращенія индукціи). Если индукція выражается въ абсолютныхъ *C. G. S.* единицахъ, то мы имѣемъ абсолют-

ный вольтажъ въ $C.\ G,\ S.$; если индукція выражается въ веберахъ, то вольтажъ будетъ въ вольтахъ.

Мы должны припомнить, что въ **непроводящей средѣ** вольтажъ въ какой либо цѣпи производитъ перемѣщеніе электричества и мѣра его измѣненія есть сила тока, съ которымъ мы поступаемъ такъ же, какъ и съ токами въ проводникахъ. Когда мы имѣемъ дѣло съ весьма малыми элементами пространства, мы говоримъ объ электрическихъ и магнитныхъ токахъ на единицу поверхности, и въ этомъ случаѣ линейные интегралы называются «**силовыми трубками**». Оставляя въ сторонѣ служащіе намъ помѣхой множители 4π и $\frac{4\pi}{10}$, мы скажемъ вмѣстѣ съ Mr. Heaviside: «электрическій токъ есть силовая трубка магнитной силы, а магнитный токъ есть отрицательная силовая трубка электрической силы». Когда мы эти два положенія выразимъ въ математической формѣ, мы получимъ два важныя въ ученіи объ электричествѣ дифференціальныя уравненія.

Инженеръ электрикъ постоянно сталкивается съ этими двумя законами. Въ послѣдующемъ будетъ дано нѣсколько примѣровъ примѣненія второго закона. Здѣсь мы приведемъ легкій примѣръ, касающійся перваго закона.

Поле вокругъ проволоки круглаго сѣченія. Прямая проволока, имѣющая радіусъ a сант., проводитъ токъ силы C $\left[\text{или } A \text{ амперовъ, такъ что } C=\frac{A}{10}\right]$.

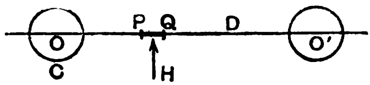
Если H есть магнитная сила на разстояніи r отъ центра проволоки, то гауссажъ по окружности радіуса r равенъ $H\times 2\pi r$, такъ какъ H, очевидно по симметріи будетъ одинаково по всей окружности. Отсюда, въ виду того, что гауссажъ равенъ $4\pi C$,

$$H=4\pi C:2\pi r=\frac{2C}{r}\left[\text{ или } \frac{2}{r}\cdot\frac{A}{10}\right].$$

Внутри проволоки кругъ радіуса r проводитъ токъ, сила котораго будетъ $\frac{r^2}{a^2}C$, отсюда H внутри проволоки на разстояніи r отъ оси будетъ

$$\frac{2rC}{a^2}\left[\text{ или } \frac{2r}{10}\cdot\frac{A}{a^2}\right].$$

Если BC есть площадь поперечнаго сѣченія проволоки съ радіусомъ a, и если OD какая либо плоскость, проходящая черезъ O ось проволоки и $OP = r$, $OQ = r + \delta r$, тогда черезъ элементъ площади



Черт. 54.

PQ длиной l сант. перпендикулярно къ плоскости бумаги, шириной δr и площадью $l.\delta r$, индукція на кв. сант. будетъ H. (Мы принимаемъ коэффиціентъ проницаемости равнымъ 1. Если онъ равенъ μ для данной среды, то индукція будетъ $\beta = \mu H$ на кв. сант.). На всю площадь индукція будетъ $H.l.\delta r$. Если имѣются двѣ параллельныя проволоки съ токами противоположнаго направленія, и если OD есть плоскость, проходящая черезъ оси обѣихъ проволокъ, то поля двухъ токовъ складываются вмѣстѣ. Если O' есть центръ второй проволоки, то общее H въ P будетъ $2C\left(\frac{1}{OP}+\frac{1}{O'P}\right)$.

77. Самоиндукція двухъ параллельныхъ проволокъ. Пусть радіусъ каждой проволоки будетъ a и разстояніе между ихъ центрами b, при чемъ длина каждой изъ нихъ между двумя перпендикулярными къ нимъ плоскостями равна l. Предполагаемъ, что эти проволоки составляютъ части двухъ проволокъ безконечной длины, чтобы устранить недоразумѣнія, возникающія въ случаѣ конечности ихъ длины.

Полная индукція отъ оси до оси состоитъ изъ суммы двухъ слагаемыхъ, $4l\int_a^b \frac{C.dr}{r}$ отъ поверхности каждой проволоки до оси другой и $4l\int_a^b \frac{rC}{a^2}dr$ отъ оси каждой проволоки до ея поверхности. Эта сумма будетъ равна

$2lC\left\{2\log\frac{b}{a}+1\right\}$, или $\frac{2lA}{10}\left\{2\log\frac{b}{a}+1\right\}$ въ абсолютныхъ единицахъ. Дѣля на 10^8 получимъ то же въ торговыхъ единицахъ.

Это общее поле при силѣ тока равной 1, есть самоиндукція L цѣпи (мы предполагаемъ, что токъ равномѣрно распредѣленъ по сѣченію проволоки) и

$$\frac{L}{l} = 2\left\{\log\frac{b^2}{a^2} + 1\right. \text{ въ } C.\ G.\ S. \text{ единицахъ, и}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{2}{10^9}\log\frac{b^2}{a^2} + 1\Big\}\,*$$

въ генри на сант. длины двухъ цѣпей.

78. Функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ. До сихъ поръ мы занимались функціей одной перемѣнной, которую мы обыкновенно называемъ x. Пытаясь понять явленія природы, мы стараемся сдѣлать такъ, чтобы только одна величина мѣнялась. Такъ, при разсмотрѣніи законовъ, которымъ подчиняются газы, мы опредѣляемъ измѣненія давленія, допуская, что мѣняется только объемъ, т. е. сохраняя температуру постоянною, и мы находимъ, что $p \propto \frac{1}{v}$. Затѣмъ мы сохраняемъ v постояннымъ и допускаемъ, что мѣняется температура; находимъ, что $p \propto t$ (гдѣ $t = \theta^0 C + 274$). Послѣ тщательныхъ опытовъ мы находимъ для одного фунта какого либо газа, что законъ $pv = Rt$ очень близокъ къ истинѣ, при чемъ R—извѣстное постоянное.

---

* Замѣтимъ, что одинъ генри равенъ 10^9 абсолютныхъ единицъ самоиндукціи; наша торговая единица индукціи, называемая веберомъ равна 10^8 абсолютныхъ единицъ индукціи.

Генри слѣдуетъ закону: вольты $= RA + L\,\frac{dA}{dt}$,

Веберъ слѣдуетъ закону: вольты $= RA + N\,\frac{dI}{dt}$,

гдѣ R выражено въ омахъ, A амперахъ, L генри, N число оборотовъ въ цѣпи, I въ веберахъ индукціи.

Въ элементарныхъ упражненіяхъ, помѣщаемыхъ въ этой книгѣ, я считаю возможнымъ вводить коэффиціентъ 4π и мириться съ затрудненіями, которыя являются благодаря ненаучной системѣ, принятой нынче. Въ моихъ дальнѣйшихъ занятіяхъ со студентами, которыя послужатъ предметомъ слѣдующей книги, я всегда пользуюсь раціональной системой единицъ Heaviside и увѣренъ, что онѣ скоро войдутъ во всеобщее употребленіе.

Далѣе замѣтимъ, что каждая изъ трехъ велилинъ p, v **и** t есть функція двухъ другихъ, такъ какъ, если **двѣ изъ нихъ** даны, то можно найти и третью.

Такимъ образомъ

$$p = R\frac{t}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

и мы можемъ сказать, что p функція двухъ *независимыхъ* перемѣнныхъ t и v.

Если взять какія нибудь частныя значенія для t и v, то мы изъ уравненія (1) можемъ вычислить p. Возьмемъ еще новыя значенія, положимъ, $t+\delta t$ и $v+\delta v$, гдѣ δt и δv — совершенно независимыя одна отъ другой величины, тогда

$$p + \delta p = R\frac{t+\delta t}{v+\delta v} \text{ и } \delta p = R\frac{t+\delta t}{v+\delta v} - R\frac{t}{v}.$$

Итакъ мы видимъ, что приращеніе δp можетъ быть вычислено, если извѣстны независимыя приращенія δt и δv.

Если мы примемъ, что приращенія эти безконечно убываютъ, то мы получимъ весьма простое выраженіе для δp черезъ δt и δv, а именно

$$\delta p = \left(\frac{dp}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dp}{dv}\right)\delta v \ldots\ldots (2).$$

Это вскорѣ будетъ доказано, но студентъ долженъ сначала освоиться съ этимъ выраженіемъ. Пусть онъ попробуетъ выразить его словами и сравнить затѣмъ свое опредѣленіе съ слѣдующимъ: «Полное приращеніе p слагается изъ двухъ частей; первая представляетъ приращеніе, которое произойдетъ въ p, если v будетъ постояннымъ, а вторая—приращеніе въ p, если t будетъ постоянной». Первое изъ этихъ приращеній равно $\delta t \times$ величину приращенія p относительно t при v постоянномъ, или, какъ мы обыкновенно обозначаемъ это $\left(\frac{dp}{dt}\right)\delta t$, и второе равно $\delta v \times$ величину приращенія p относительно v при t постоянной.

Съ этой идеей постоянно приходится сталкиваться на

практикѣ. Мы дали алгебраическій способъ изображенія этого новаго понятія, и студентъ, желающій основательно познакомиться съ этимъ вопросомъ, найдетъ самъ много подходящихъ примѣровъ.

Итакъ, если одинъ фунтъ вещества, состояніе котораго опредѣляется его p, v и t, переходитъ въ новое состояніе, то это послѣднее вполнѣ опредѣляется любыми двумя его приращеніями δp и δv, или δv и δt, или δp и δt, такъ какъ предполагается, что извѣстно *характеристическое* уравненіе вещества, т. е. законъ, связывающій p, v и t.

Далѣе, количество теплоты δH, сообщенное газу въ нѣкоторый незначительный періодъ измѣненія его состоянія, можетъ быть вычислено по двумъ изъ величинъ δv, δt и δp, и результаты вычисленія должны получиться одинаковые.

Чтобы выразить, что измѣненія предполагаются чрезвычайно малыми, мы говоримъ, что

$$\left.\begin{aligned} dH &= k\,.\,dt + l\,.dv \\ &= K.\,dt + L.dp \\ &= P.dp + V.dv \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

гдѣ коэффиціенты k, l, K, L, P и V суть функціи состоянія вещества, т. е. двухъ изъ величинъ p, v и t. Замѣтимъ, что $k.dt$ представляетъ количество теплоты, потребное для незначительнаго измѣненія его состоянія, опредѣляемаго измѣненіемъ его температуры, въ случаѣ, если бы объемъ оставался постояннымъ: поэтому k называется теплоемкостью при постоянномъ объемѣ. Подобнымъ же образомъ K называется теплоемкостью при постоянномъ давленіи. Что касается до l и L, то ихъ можно разсматривать, какъ нѣкоторые виды скрытой теплоты, такъ какъ температура предполагается постоянной.

Вышеуказанные коэффиціенты обыкновенно не постоянны, а зависятъ отъ состоянія тѣла. Математическое доказательство того, что $dH = k.dt + l\,dv$, гдѣ k и l нѣкоторыя числа, зависящія отъ состоянія тѣла, если только δH можетъ быть вычислено по δt и δv, слѣдующее: — Если δH можетъ быть вычислено по δt и δv, то $\delta H = k.\delta t + l.\delta v + a\,(\delta t)^2 + b\,(\delta v)^2 + c\,(\delta t.\delta v) + e\,(\delta t)^3 +$ члены третьей и высшихъ степеней δt и δv, при чемъ k, l, a, b, e и пр. суть коэффиціенты, зависящіе отъ состоянія тѣла. Дѣля обѣ части равенства на δt или δv и предполагая, что δt и δv безконечно убываютъ, получаемъ въ результатѣ, что предложеніе доказано.

Пояснительный примѣръ. Положимъ, что выраженіе (1) справедливо для одного фунта *воздуха*, и пусть R равно 96. p выражено въ фунтахъ же квадр. футъ и v въ куб. футахъ.

Такъ какъ $p = 96\,\dfrac{t}{v}$, то $\left(\dfrac{dp}{dt}\right) = \dfrac{96}{v}$,

$$\left(\frac{dp}{dv}\right) = -\frac{96t}{v^2} = -\frac{p}{v}$$

Отсюда изъ выраженія (2) имѣемъ

$$\delta p = \frac{96}{v} \, . \, \delta t - \frac{p}{v} \, . \, \delta v \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Примѣръ. Положимъ, что $t = 300$, $p = 2000$, $v = 14 \cdot 4$.

Дадимъ t и v новыя значенія, а именно, $t = 301$ и $v = 14 \cdot 5$. Легко показать, что въ этомъ случаѣ $p = 1992 \cdot 83$, но мы желаемъ найти приращеніе давленія при помощи (2) или же (4).

$$\delta p = \frac{96}{14 \cdot 4} \times 1 - \frac{2000}{14 \cdot 4} \times 0 \cdot 1 = -7.22 \text{ фунт. на квадр. футъ}$$

между тѣмъ какъ отвѣтъ долженъ быть — $7 \cdot 17$.

Возьмемъ далѣе $\delta t = 0 \cdot 1$ и $\delta v = 0 \cdot 01$ и примѣнимъ ту же формулу. Возьмемъ $\delta t = 0 \cdot 01$ и $\delta v = 0 \cdot 001$ или вообще возьмемъ весьма малыя приращенія. Такимъ путемъ студентъ самъ убѣдится, что равенство (1) дѣйствительно справедливо, но только въ случаѣ, если приращенія предполагаются безконечно убывающими.

Здѣсь мы имѣемъ очень интересное упражненіе: предположимъ въ равенствѣ (2), что $\delta p = 0$. Мы получаемъ связь между δt и δv, *когда эти приращенія происходятъ при постоянномъ давленіи.* Раздѣлимъ одно изъ нихъ на другое и мы получимъ, что $\frac{\delta v}{\delta t}$ при p постоянномъ, или иначе

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = -\frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)}{\left(\frac{dp}{dv}\right)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Съ перваго взгляда знакъ минусъ удивитъ студента и невольно заставитъ его подумать, но онъ хорошо сдѣлаетъ, если самъ выяснитъ себѣ на нѣсколькихъ примѣрахъ выраженіе (5). Примѣняя вышеизложенное къ уравненію $pv = Rt$, имѣемъ

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{R}{p}, \quad \left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{R}{v}, \quad \left(\frac{dp}{dv}\right) = -\frac{Rt}{v^2} \text{ или } -\frac{p}{v}$$

и выраженіе (5) оказывается вполнѣ правильнымъ, такъ какъ

$$\frac{R}{p} = -\frac{R}{v} : \left(-\frac{p}{v}\right).$$

Студентъ найдетъ для себя прекрасное упражненіе, если выразитъ δv черезъ δt и δp, или δt черезъ δv и δp, и выводы свои примѣнитъ къ газу, для котораго $pv = Rt$. †

79. Другіе пояснительные примѣры. Выраженія (3) даютъ одинаковые результаты, будемъ ли мы вычислять по dt и dv, или по dt dp, или по dv и dp; поэтому, напримѣръ, имѣемъ

$$k \,.\, dt + l \,.\, dv = K \,.\, dt + L \,.\, dp \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(6)$$

Мы видѣли, что $dp = \left(\frac{dp}{dt}\right) dt + \left(\frac{dp}{dv}\right) dv$. Подставляя это выраженіе для dp въ равенство (6), имѣемъ

$$k \,.\, dt + l \,.\, dv = K \,.\, dt + L \left(\frac{dp}{dt}\right) dt + L \left(\frac{dp}{dv}\right) dv.$$

Это равенство справедливо при любомъ значеніи независимыхъ приращеній dt и dv, положимъ, что $dt = 0$ и $dv = 0$, тогда имѣемъ

$$k = K + L \left(\frac{dp}{dt}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

$$l = L \left(\frac{dp}{dv}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (8).$$

Подставимъ далѣе въ равенство (6) $dv = \left(\frac{dv}{dt}\right) dt + \left(\frac{dv}{dp}\right) dp$ и получимъ

$$k \,.\, dt + l \left(\frac{dv}{dt}\right) dt + l \left(\frac{dv}{dp}\right) dp = K \,.\, dt + L \,.\, dp.$$

Приравнивая, какъ и выше, коэффиціенты при dt и при dv имѣемъ

$$k + l \left(\frac{dv}{dt}\right) = K \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (9)$$

$$l \left(\frac{dv}{dp}\right) = L \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (10).$$

Далѣе, полагая $k \,.\, dt + l \,.\, dv = P \,.\, dp + V \,.\, dv$ и подставляя

$$dp = \left(\frac{dp}{dt}\right) dt + \left(\frac{dp}{dv}\right) dv,$$

имѣемъ $k \, . \, dt + l \, . \, dv = P\left(\frac{dp}{dt}\right) dt + P\left(\frac{dp}{dv}\right) dv + V \, . \, dv$, откуда

$$k = P\left(\frac{dp}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$l = P\left(\frac{dp}{dv}\right) + V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Полагая, наконецъ, $K \, . \, dt + L \, . \, dp = P \, . \, dp + V \, . \, dv$, и подставляя

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv,$$

имѣемъ

$$K\left(\frac{dt}{dp}\right) dp + K\left(\frac{dt}{dv}\right) dv + L \, . \, dp = P \, . \, dp + V \, dv, \text{ откуда}$$

$$K\left(\frac{dt}{dp}\right) + L = P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$K\left(\frac{dt}{dv}\right) = V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Соотношенія (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) и (14), которыя не всѣ независимы другъ отъ друга, получены простымъ математическимъ путемъ безъ примѣненія законовъ Термодинамики. Мы обозначили черезъ H — количество теплоты, t — температуру и пр., но мы можемъ буквамъ и не давать физическаго значенія, если только мы не желаемъ этого.

Вышеприведенныя соотношенія справедливы для любого тѣла. Найдемъ, какой видъ они примутъ для газа, который слѣдуетъ закону $pv = Rt$ (математическая абстракція, называемая идеальнымъ газомъ). Мы знаемъ, что

$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{R}{v}$, такъ что (7) получаетъ видъ $k = K + L\frac{R}{v}$ .... (7)*

$\left(\frac{dp}{dv}\right) = -\frac{p}{v}$, такъ что (8) получаетъ видъ $l = -L\frac{p}{v}$ ...... (8)*

$\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{R}{p}$, такъ что (9) получаетъ видъ $k + l\frac{R}{p} = K$ ... (9)*

$\left(\frac{dv}{dp}\right) = -\frac{v}{p}$, такъ что (10) получаетъ видъ $-l\frac{v}{p} = L$ .... (10)*

$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{R}{v}$, такъ что (11) получаетъ видъ $k = P\frac{R}{v}$ ..... (11)*

$\left(\frac{dp}{dv}\right) = -\frac{p}{v}$, такъ что (12) получаетъ видъ $l = -P\frac{p}{v} + V \ldots (12)^*$

Очевидно, что эти уравненія не всѣ независимы другъ отъ друга; такъ, соединяя (10)* съ (9)*, мы получимъ (7)*.

80. Другой пояснительный примѣръ. Упругость газа, какъ мы видѣли выше въ пунктѣ 58, выражается слѣдующимъ образомъ

$$e = -v\frac{dp}{dv}.$$

Далѣе это выраженіе упругости въ случаѣ, если температура t остается постоянной, будемъ писать въ видѣ $e_t = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)$.

Если мы желаемъ найти *адіабатическую* упругость e_H, то намъ нужно знать величину $\frac{dp}{dv}$ въ томъ случаѣ, когда газъ не теряетъ и не получаетъ теплоты. Въ послѣднемъ изъ выраженій (3) полагаемъ $dH = 0$, и тогда отношеніе величинъ dp и dv какъ разъ будетъ отвѣчать нашимъ требованіямъ, или $\left(\frac{dp}{dv}\right)_H = -\frac{V}{P}$, гдѣ H поставлено для того, чтобы обозначить, что H—постоянно, или что газъ не теряетъ и не получаетъ теплоты. Отсюда $e_H = v\frac{V}{P}$.

Итакъ $$\frac{e_H}{e_t} = -\frac{V}{P} : \left(\frac{dp}{dv}\right).$$

Взявъ V изъ выраженія (14) пункта 79 и P изъ (11), имѣемъ

$$\frac{e_H}{e_t} = -\frac{K\left(\frac{dt}{dv}\right)\left(\frac{dp}{dt}\right)}{k\left(\frac{dp}{dv}\right)};$$

но, какъ видно изъ выраженія (5), $\left(\frac{dp}{dv}\right) : \left(\frac{dp}{dt}\right) = -\left(\frac{dt}{dv}\right)$, а тому для любого тѣла $\frac{e_H}{e_t} = \frac{K}{k}$ . . . . (15).

Отношеніе этихъ двухъ удѣльныхъ теплоемкостей обыкновенно обозначается буквой γ. Замѣтьте, что въ приведенномъ доказательствѣ не было сдѣлано ссылки ни на одинъ изъ двухъ законовъ Термодинамики, а также и на шкалу температуры.

81. Общее доказательство. Если u представляетъ функцію x и y, то мы можемъ написать это въ видѣ $u = f(x, y)$. Возьмемъ частныя значенія x и y и вычислимъ u. Возьмемъ далѣе значенія $x + \delta x$ и

$y+\delta y$, гдѣ δx и δy совершенно независимы одно отъ другого, и вычислимъ снова u, обозначивъ его черезъ $u+\delta u$. Вычитая результатъ перваго вычисленія изъ второго, имѣемъ

$$\delta u = f(x+\delta x,\ y+\delta y) - f(x,\ y).$$

Прибавимъ ко второй части равенства и вычтемъ одну и туже величину $f(x,\ y+\delta y)$, тогда

$$\delta u = f(x+\delta x,\ y+\delta y) - f(x,\ y+\delta y) + f(x,\ y+\delta y) - f(x,\ y),$$

но это можно продставить въ видѣ

$$\delta u = \frac{f(x+\delta x,\ y+\delta y) - f(x,\ y+\delta y)}{\delta x}\delta x + \frac{f(x, y+\delta y) - f(x, y)}{\delta y}\ \delta y \ldots (16)$$

Если далѣе предположимъ, что δx и δy безконечно убываютъ, то коэффиціентъ при δy или

$$\frac{f(x,\ y+\delta y) - f(x,\ y)}{\delta y} \text{ обращается въ } \frac{df(x,\ y)}{dy} \text{ или } \left(\frac{du}{dy}\right),$$

при чемъ x является постояннымъ. Мы дали такое опредѣленіе производной еще въ примѣчаніи пункта 20. Далѣе, коэффиціентъ при δx въ предѣлѣ при исчезновеніи δy обращается въ $\dfrac{f(x+\delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\delta x}$.

Если мы подставимъ u вмѣсто $f(x,\ y)$, то получимъ

$$\mathrm{du} = \left(\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}\right)\mathrm{dx} + \left(\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}}\right)\mathrm{dy} \ \ldots\ldots\ldots\ (17).$$

Итакъ, если $u = ax^2 + by^2 + cxy$, $du = (2ax+cy)\,dx + (2by+cx)\,dy$.

82. Замѣтимъ, что, если мы имѣемъ

$$dz = M.dx + N.dy \ \ldots\ldots\ldots\ (18),$$

гдѣ M и N — нѣкоторыя функціи x и y, то изъ этого еще не слѣдуетъ, что и z есть функція x и y. Напримѣръ, мы имѣли въ (3)

$$dH = k.dt + l.dv,$$

гдѣ k и l суть функціи t и v. Здѣсь **Н полная тепловая энергія**, которая сообщена одному фунту газа, не есть функція t и v; вообще она **не есть функція состоянія газа**. Газъ можетъ получить неопредѣленное большое количество тепловой энергіи и возвратиться къ прежнему состоянію, не отдавши назадъ той энергіи, которую онъ получилъ. Первый законъ Термодинамики даетъ поэтому слѣдующее положеніе, если $\mathrm{dE} = \mathrm{dH} - \mathrm{p}.\mathrm{dv}$, гдѣ $p.dv$ представляютъ прозведенную механическую работу, то мы можемъ дать этому E названіе **внутренней энергіи**, такъ какъ она есть функція состоянія газа. Она постоянно получаетъ одну и туже величину, коль скоро газъ приходитъ въ прежнее состояніе.

И такъ наше E представляетъ функцію t и v, или t и p, или p и v, но H — ни въ коемъ случаѣ!

Второй законъ Термодинамики слѣдующій:—если dH раздѣлить на t, гдѣ $t = \theta°C + 274$ и $\theta°C$ измѣрено по газовому термометру, и обозначить $\frac{dH}{t}$ чрезъ $d\psi$, то ψ называется энтропіей газа и представляетъ функцію его состоянія.

83. Если мы имѣемъ

$$dz = M \,.\, dx + N \,.\, dy \;\ldots\ldots\ldots \;(18),$$

гдѣ M и N—нѣкоторыя функціи x и y, то весьма важно знать, когда z есть также функція x и y. Если мы имѣемъ дѣло съ такимъ случаемъ, то (18) въ дѣйствительности должно имѣть видъ

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

т. е. $$M = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ и } N = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

и отсюда имѣемъ $$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (19),$$

такъ какъ извѣстно, что $\frac{d^2z}{dy \,.\, dx} = \frac{d^2z}{dx \,.\, dy}$ *.

---

* Докажемъ, что

$$\frac{d^2u}{dy \,.\, dx} = \frac{d^2u}{dx \,.\, dy}.$$

Мы уже давали для поясненія этого положенія нѣсколько примѣровъ въ пунктѣ 31, и если студентъ еще не вполнѣ освоился съ тѣмъ, что нужно доказать, то пусть онъ лучше продѣлаетъ побольше примѣровъ, или разберетъ вновь старые.

Пусть $$u = f(x, y);$$

$\left(\frac{du}{dx}\right)$ есть предѣльная величина выраженія $\frac{f(x + \delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}$ при безконечно убывающемъ δx. Далѣе это выраженіе есть также функція y, а потому $\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right)$ или $\frac{d^2u}{dy \,.\, dx}$ согласно данному нами опредѣленію производной, есть предѣльная величина выраженія

$$\frac{1}{\delta y}\left\{\frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y + \delta y)}{\delta x} - \frac{f(x + \delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}\right\},$$

гдѣ δx и δy безконечно убываютъ.

Дѣйствуя въ обратномъ порядкѣ, находимъ что $\frac{d^2u}{dx \,.\, dy}$ есть пре-

Итакъ мы имѣемъ весьма важное правило:—Если

$$dz = M\,.\,dx + N\,.\,dy \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(18)$$

и z есть функція x и y (вмѣсто того чтобы говорить, что z есть функція x и y, можно еще сказать, что $dz = M\,.\,dx + N\,dy$ есть *полный дифференціалъ*), то

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)^{*} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

дѣльная величина выраженія

$$\frac{1}{\delta x}\left\{\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x+\delta x, y)}{\delta y} - \frac{f(x, y+\delta y) - f(x, y)}{\delta y}\right\},$$

гдѣ δx и δy безконечно убываютъ. Очевидно, что два вышеуказанныя выраженія тождественны при всѣхъ значеніяхъ δx и δy, а потому мы принимаемъ, что они остаются такими-же и въ предѣлѣ.

* $$M\,.\,dx + N.\,dy \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

гдѣ M и N—нѣкоторыя функціи x и y, **можетъ быть всегда умножено на нѣкоторую функцію x и y, которая сдѣлаетъ его полнымъ дифференціаломъ.** Этотъ множитель обыкновенно называется интегрирующимъ множителемъ. Какого бы вида функціями x и y ни были M и N, мы можемъ написать

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

а это означаетъ, что есть *нѣкоторый* законъ, связывающій x и y. Выразимъ его такъ:

$$F(x, y) = c, \text{ тогда} \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \ldots . (3),$$

и такъ какъ $\frac{dy}{dx}$ въ выраженіи (3) есть тоже, что и въ выраженіи (2), то

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) : \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{M}{N}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \mu M$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \mu N$, гдѣ μ есть нѣкоторая функція x и y, или можетъ быть и постояннымъ.

Умножая (1) на μ, мы, очевидно получаемъ, выраженіе

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)dy \quad \ldots\ldots\ldots (4),$$

которое представляетъ полный дифференціалъ. Легко показать, что не только всегда есть интегрирующій множитель μ, но что этихъ

84. Первый законъ Термодинамики слѣдующій:
Если $dE = dH - p.dv$, или $dE = k.dt + (l - p)\, dv$, то dE есть полный дифференціалъ, то есть E возвращается къ своему прежнему значенію, когда полная работа, произведенная въ циклѣ Карно, равна $\left(\frac{dp}{dt}\right) \delta t \,.\, \delta v$. Конечно возвращаются къ прежнимъ значеніямъ также t и v, можно выразиться иначе, именно, что для полнаго цикла $\int dE = 0$).

множителей имѣется неограниченное число. Для выясненія важности этого положенія я изложу ходъ **доказательства** его, которое вытекаетъ **изъ второго закона Термодинамики.**

1. Мы уже показали, что для любого тѣла, состояніе котораго опредѣляется t и v,

$$dH = k\,.\,dt + l\,dv \,\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

гдѣ k и l суть функціи t и v.

Замѣтимъ, что t можетъ быть измѣряемо по любой шкалѣ температуръ. Мы только что доказали, что есть нѣкоторая функція μ отъ t и v, умножая на которую всѣ члены выраженія (5), мы получимъ полный дифференціалъ; въ дѣйствительности имѣется неограниченное число такихъ функцій. Называя результатъ умноженія $d\varphi$, имѣемъ

$$d\varphi = \mu\,.\,dH = \mu k\,.\,dt + \mu l\,.\,dv \,\ldots\ldots\ldots (6).$$

Посмотримъ, нельзя-ли найти такое значеніе для μ, чтобы оно было функціей одного только t. Если μ дѣйствительно таково, то, такъ какъ производная отъ μk по v (t принимается постоянной) равна производной отъ μl по t (v принимается постояннымъ), имѣемъ

$$\mu \left(\frac{dk}{dv}\right)_t = l\frac{d\mu}{dt} + \mu \left(\frac{dl}{dt}\right)_v,$$

или

$$\left(\frac{dk}{dv}\right)_t = \left(\frac{dl}{dt}\right)_v + \frac{l}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

Но первый законъ Термодинамики даетъ намъ (см. пунктъ 84)

$$\left(\frac{dk}{dv}\right)_t = \left(\frac{dl}{dt}\right)_v - \left(\frac{dp}{dt}\right) \,\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{l}\left(\frac{dp}{dt}\right) = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Это и есть условіе, чтобы $\mu\,.\,dH$ было полнымъ дифференціаломъ для того случая, когда μ есть функція одной только температуры. Очевидно, что выраженіе (9) даетъ для даннаго тѣла искомое значеніе μ; но намъ особенно интересно узнать, нѣтъ ли такого значенія для μ, которое было бы одинаково для всѣхъ тѣлъ.

Мы уже видѣли, что производная отъ k по v, если принять t постоянной, равна производной отъ $l - p$ по t, если принять v постояннымъ, или

$$\left(\frac{dk}{dv}\right)_t = \left(\frac{dl}{dt}\right)_v - \left(\frac{dp}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Это положеніе, которое справедливо для всякаго газа, называется иногда первымъ закономъ Термодинамики.

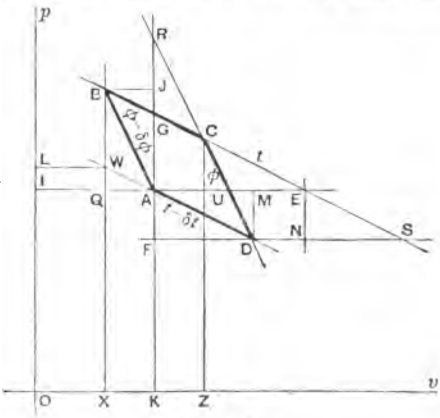
Второй законъ Термодинамики слѣдующій: $\frac{dH}{t}$, или $d\varphi = \frac{k}{t} \cdot dt + \frac{l}{t} \cdot dv \ldots (21)$, есть полный дифференціалъ, а потому производная отъ $\frac{k}{t}$ по v, если принять t постоянной, равна производной отъ $\frac{l}{t}$ по t, если принять v постояннымъ †.

---

† Правило для нахожденія производной частнаго дано въ пунктѣ 197.

---

2. Въ этомъ пунктѣ доказывается, что дѣйствительно есть такое значеніе. Мнѣ нѣтъ надобности приводить здѣсь обычное и хорошо извѣстное студентамъ доказательство того, что всѣ обратимыя тепловыя машины, работающія между температурами t и $t - \delta t$, имѣютъ одинаковый коэффиціентъ полезнаго дѣйствія. Далѣе, пусть $ABCD$ представляетъ въ нѣкоторомъ масштабѣ элементарный циклъ Карно. Газъ въ состояніи A имѣетъ температуру $t - \delta t$; AI представляетъ объемъ его и AK—давленіе. Пусть AD будетъ изотермой $t - \delta t$, а BC изотермой t; AB и CD пусть будутъ адіабаты.



Черт. 55.

Обратимъ особенное вниманіе на то, что отрѣзокъ AG или WB (W находится на пересѣченіи продолженія линіи AD съ ординатой въ B) равенъ $\left(\frac{dp}{dt}\right) \delta t$.

Далѣе, площадь параллелограмма $ABCD$, представляющая произведенную работу, равна $BW \times XZ$ (это становится очевиднымъ, если обратить вниманіе на то, что параллелограммы имѣютъ общее основа-

Слѣдовательно $$\frac{1}{t}\left(\frac{dk}{dv}\right)_t = \frac{t\left(\frac{dl}{dt}\right)_v - l}{t^2},$$

или $$\left(\frac{dk}{dv}\right)_t = \left(\frac{dl}{dt}\right)_v - \frac{l}{t} \quad \ldots\ldots\ldots (22).$$

Это положеніе, справедливое для любого газа, также называется иногда вторымъ закономъ Термодинамики.

Сопоставляя выраженіе (20) и (22), мы получаемъ для любого газа, что

ніе и заключены между тѣми же двумя параллелями). Обозначимъ XZ чрезъ δv (приращеніе объема при переходѣ газа по изотермѣ изъ состоянія B въ состояніе C). Количество теплоты, которое нужно затратить при этомъ процессѣ, равно $l \,.\, \delta v$, какъ это видно изъ выраженія (3) пункта 78, а потому отношеніе $\frac{\text{произведен. работа}}{\text{затрач. колич. теплоты}}$ = коэффиціенту полезнаго дѣйствія $= \frac{1}{l}\left(\frac{dp}{dt}\right)\delta t \ldots\ldots (10)$, и этотъ законъ одинаковъ для всѣхъ тѣлъ.

Такъ какъ величина указаннаго отношенія одинакова для всѣхъ тѣлъ, то попробуемъ найти её для какого нибудь одного тѣла. Знаменитый опытъ Джоуля (два сосуда, одинъ съ газомъ высокаго давленія, а другой—низкаго давленія. съ соединительнымъ краномъ, были погружены совершенно въ ванну съ температурой, равной температурѣ газа; послѣ того какъ давленіе газа въ обоихъ сосудахъ сравнялось, температура ванны сохранила прежнюю величину) показалъ, что въ газахъ внутренняя энергія очень близка къ постоянной при постоянной температурѣ или, что тоже самое, что l въ газахъ совсѣмъ почти равно p; также хорошо извѣстно, что въ газахъ, при постоянномъ объемѣ, p представляетъ линейную функцію температуры. Существуетъ-ли въ дѣйствительности тѣло, для котораго вышеуказанное положеніе абсолютно справедливо, это вопросъ, разрѣшеніе котораго мы должны предоставить лицамъ, изучающимъ спеціально высшую математику, а сами примемъ, что такое тѣло существуетъ и въ немъ

$$\frac{1}{l}\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{1}{\theta + 274} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

гдѣ θ — число градусовъ, читаемое по стоградусному воздушному термометру. Если мы за шкалу температуры примемъ $t = \theta + 274$ и выраженіе (11) будемъ разсматривать, какъ общее значеніе выраженія $\frac{1}{l}\left(\frac{dp}{dt}\right)$, то имѣемъ изъ (9), что $\frac{1}{t} = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}$, или $\frac{dt}{t} = -\frac{d\mu}{\mu}$, откуда $\log t + \log\mu$ = постоянному, или $\mu = \frac{c}{t}$, гдѣ c — произвольное

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\frac{l}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

весьма важный законъ †.

Примѣняя эти выводы къ случаю идеальнаго газа, мы находимъ, что выраженіе (23) приметъ видъ $\frac{l}{t}=\frac{R}{v}$, или $l=\frac{Rt}{v}$, т. е. $l=p$...(24),

Отсюда выраженіе (20) обращается въ $\left(\frac{dk}{dv}\right)_t=0$. На практикѣ этотъ выводъ можетъ быть и не представляетъ особенной важности, но студентъ долженъ заняться имъ въ качествѣ упражненія. Для любого тѣла k есть функція v и t. но въ разсматриваемомъ случаѣ для идеальнаго газа, какова-бы ни была температура, k не измѣняется съ измѣненіемъ объема. Сопоставляя (24) съ (9)* и пр. (стр. 141), имѣемъ, что $K-k=R$, и, такъ какъ Реньо нашелъ, что K постоянно для воздуха и другихъ газовъ, то и k также постоянно, такъ что

$$l=p, L=-v, P=\frac{v}{\gamma-1}, \quad V=\frac{p\gamma}{\gamma-1}, \text{ гдѣ } \gamma=\frac{K}{k}.$$

Итакъ для идеальнаго газа мы можемъ производить *точные* разсчеты въ области Термодинамики, коль скоро извѣстны K и R.

85. Уравненія (3) пункта 78 для фунта идеальнаго газа принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} dH &= k\,.\,dt+p\,.\,dv \\ &= K\,.\,dt-v\,.\,dp \\ &= \frac{v}{\gamma-1}\,dp+\frac{p\gamma}{\gamma-1}\,dv. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1).$$

постоянное. Найденное значеніе μ и представляетъ интегрирующій множитель для выраженія (5); мы обыкновенно принимаемъ c равнымъ единицѣ или $\mu=\frac{1}{t}$, — функція Карно.

Конечно, если даже и имѣется какая либо независящая отъ p и v, функція, то невѣроятно, чтобы она въ дѣйствительности была такъ проста, какъ множитель $\frac{1}{\theta+274}$ (гдѣ θ — число градусовъ по воздушному стоградусному термометру), или чтобы дѣйствительно существовало тѣло, въ точности удовлетворяющее указанному выше положенію. Называя дѣлителя t **абсолютной температурой**, мы принимаемъ на вѣру, что для обычныхъ значеній θ величина $t=\theta+274$, и чѣмъ больше значеніе θ, тѣмъ правильнѣе выраженіе t чрезъ $\theta+274$; но, когда θ — очень мало, абсолютная температура по всей вѣроятности представляетъ гораздо болѣе сложную функцію θ. Великіе ученые, которымъ мы обязаны открытіемъ законовъ Термодинамики, никогда не считали $-274°C$ за абсолютный нуль температуры.

---

† Правило для нахожденія производной частнаго дано въ пунктѣ 197.

Послѣднее изъ этихъ выраженій я пишу въ видѣ

$$\frac{1}{\gamma-1}\,d\,(pv)+p\,.\,dv\;\ldots\ldots\ldots\quad(2),$$

а также $dE=k\,.\,dt$, или $E=kt+$постоянное . . . . (3).

Изъ послѣдняго равенства легко получить и другія выраженія для E черезъ p и v.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи этого пункта я всѣ выводы дѣлаю для идеальнаго газа.

Примѣръ 1. $d\varphi=k\,.\frac{dt}{t}+\frac{p}{t}\,.\,dv$, или, такъ какъ $\frac{p}{t}=\frac{R}{v}$

$$d\varphi=k\frac{dt}{t}+\frac{R}{v}\,.\,dv.$$

Интегрируя послѣднее равенство, имѣемъ
$\varphi=k\log t+R\log v+$постоянное, или $\varphi=\log t^{\kappa}v^{\mathrm{R}}+$постоянное... (4).

Далѣе $d\varphi=\frac{K}{t}.dt-\frac{v}{t}\,.\,dp$, но $\frac{v}{t}=\frac{R}{p}$.

А потому $d\varphi=\frac{K}{t}\,dt-\frac{R}{p}\,dp$.

Интегрируя, имѣемъ
$\varphi=K\log t-R\log p+$постоянное, или $\varphi=\log t^{\kappa}p^{\mathrm{R}}+$постоянное... (5).

Подставляя вмѣсто t его значеніе $\frac{pv}{R}$, мы получаемъ выраженіе (5) въ видѣ

$$\varphi=\log p^{\kappa}v^{\mathrm{K}}+\text{постоянное}\;\ldots\ldots\quad(6).$$

Адіабатическій законъ или условіе, чтобы φ было постоянно, можетъ быть сразу выведенъ изъ приведенныхъ выше выраженій, а именно, имѣемъ

$$tv^{\gamma-1}=\text{постоянному},$$

или

$$t^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\,p=\text{постоянному},$$

или

$$pv^{\gamma}=\text{постоянному}.$$

Студенты могутъ сами себѣ составить много интересныхъ упражненій подобнаго рода.

Примѣръ 2. Фунтъ газа въ состояніи p_0, v_0, t_0 получаетъ количество теплоты H_{01},—какое въ немъ произойдетъ измѣненіе состоянія? Указанія для рѣшенія этой задачи мы получаемъ изъ выраженій (1).

I. Положимъ, что **объемъ** v_0 **остается постояннымъ.** Тогда изъ (1) имѣемъ $dH=k\,.\,dt$.

Интегралъ этого выраженія въ предѣлахъ между t_0 и t_1 равенъ $H_{01} = k(t_1 - t_0)$, и мы можемъ вычислить величину повышенія температуры до t_1.

Далѣе $dH = \frac{v_0}{\gamma - 1} dp$, откуда интегралъ или $H_{01} = \frac{v_0}{\gamma - 1}(p_1 - p_0)$, и мы можемъ вычислить величину повышенія давленія.

II. Положимъ, что **давленіе** p_0 **остается постояннымъ.**

$$dH = K \,.\, dt, \text{ а потому } H_{01} = K(t_1 - t_0).$$

Далѣе $$dH = \frac{p_0\gamma}{\gamma - 1} dv, \text{ а потому } H_{01} = \frac{p_0\gamma}{\gamma - 1}(v_1 - v_0).$$

III. При **постоянной температурѣ.**

$dH = p \,.\, dv$, или $H_{01} = \int_{v_0}^{v_1} p \,.\, dv = W$ — работѣ, произведенной газомъ при расширеніи.

IV. **При произвольныхъ условіяхъ** измѣненія давленія и объема.

$$H_{01} = k(t_1 - t_0) + \text{произведенная работа.}$$

Подобнымъ же образомъ изъ (2)

$$H_{01} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 v_1 - p_0 v_0) + \text{произведенная работа.}$$

Если $H = O$, произведенная работа $= k(t_1 - t_0)$

Послѣднее изъ выраженій (1) мы часто пишемъ въ слѣдующемъ удобномъ видѣ

$$\frac{dH}{dv} = \frac{1}{\gamma - 1}\left\{ v \frac{dp}{pv} - \gamma p \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7).$$

Если газъ не получаетъ теплоты при измѣненіи объема,

или $$\frac{dH}{dv} = 0, \text{ тогда } v\frac{dp}{dv} + \gamma \,.\, p = 0,$$

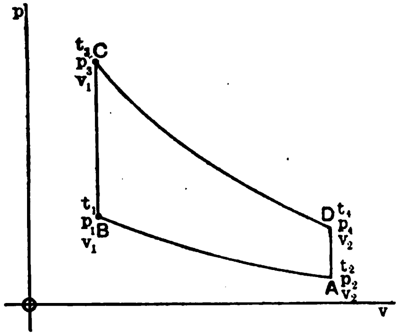
или $\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$, откуда, интегрируя, имѣемъ, $\log p + \gamma \log v =$ постоянному,

$$\text{или } pv^{\gamma} = \text{постоянному.}$$

Такимъ обрэзомъ мы опять получили выраженіе адіабатическаго закона.

Примѣръ 3. Въ хорошо извѣстномъ **циклѣ операцій газовой или бензиновой машины** одинъ фунтъ газа въ состояніи p_2, t_2, v_2, указанномъ точкою A, сжимается адіабатически до состоянія p_1, v_1, t_1, указаннаго точкою B. Работа, затраченная *на сжатіе* газа, очевидно, (изъ IV) равна $k(t_1 - t_2)$ и полностью идетъ на *увеличеніе внутренней энергіи.*

Количество теплоты, затраченное при переходѣ газа изъ состоянія B въ состояніе C, въ которомъ мы имѣемъ p_3, v_1, t_3, равно $H = k\ (t_3 - t_1)$, при чемъ объемъ остается постояннымъ.



Черт. 56.

Работа, произведенная адіабатическимъ расширеніемъ газа по CD, равна $k\,(t_3 - t_4)$.

Полезная работа, произведенная машиной = работѣ во время процесса CD — работа во время процесса $AB =$

$$W = k\ (t_3 + t_2 - t_1 - t_4),$$

$$\frac{W}{H} = \text{коэфф. полезн. дѣйствія}\ e = \frac{t_3 + t_2 - t_1 - t_4}{t_3 - t_1} =$$

$$= 1 - \frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (8).$$

Но мы видѣли, что при адіабатическомъ процессѣ $tv^{\gamma-1}$ сохраняетъ постоянную величину, а потому

$$t_2 v_2^{\ \gamma-1} = t_1 v_1^{\ \gamma-1},$$

$$t_4 v_2^{\ \gamma-1} = t_3 v_1^{\ \gamma-1}.$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что $\frac{t_4}{t_3} = \frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}$, и каждое изъ этихъ отношеній равно $\frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_1}$. Пользуясь этимъ выводомъ для выраженія (8), имѣемъ

$$\text{коэфф. полезн. дѣйствія} = 1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1} \ldots\ldots\ldots\ (9),$$

формула, которая полезна тѣмъ, что показываетъ степень увеличенія коэффиціента полезнаго дѣйствія, вызываемаго уменьшеніемъ объема v_1.

Студенты найдутъ много хорошихъ упражненій въ другихъ циклахъ газовыхъ машинъ.

Измѣненіе состоянія.

86. Вмѣсто того, чтобы пользоваться уравненіями (3) пункта 78, выведемъ новыя уравненія, спеціально относяціяся къ измѣненію состоянія. Разсмотримъ одинъ фунтъ вещества, при чемъ m пусть будетъ вѣсъ пара и $1-m$ жидкости (или, если происходитъ переходъ изъ твердаго состоянія въ жидкое, то m будетъ вѣсъ жидкости, $1-m$ — твердаго тѣла) и пусть

s_2 представляетъ объемъ въ куб. футахъ одного фунта пара
s_1 » » » » » одного фунта жидкости
p — давленіе, t — температура. p есть фукція одной только t.

Если v есть объемъ вещества въ смѣшанномъ состояніи, то

$$v = ms_2 + (1-m)s_1$$
$$= (s_2 - s_1)m + s_1, \text{ или } v = mu + s_1 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

если мы обозначимъ $s_2 - s_1$ чрезъ u.

Когда смѣси сообщается количество теплоты dH, то мы предполагаемъ, что мѣняются t и m. Дѣйствительно, такъ какъ состояніе опредѣляется величинами t и m, то ихъ мы и примемъ за независимыя перемѣнныя. Если σ_2 и σ_1 представляютъ удѣльныя теплоемкости пара и жидкости, когда паръ въ насыщенномъ состояніи (напримѣръ, σ_2 представляетъ количество теплоты, которое нужно сообщить одному фунту пара, чтобы поднять его температуру на одинъ градусъ, при чемъ давленіе въ тоже самое время повышается по своему закону), тогда m фунтовъ пара требуютъ количество теплоты равное $m\sigma_2 . dt$, а $1-m$ фунтовъ жидкости требуютъ $(1-m)\,\sigma_1 . dt$, и *притомъ*, если dm жидкости обращается въ паръ, требуется еще $L . dm$ количество теплоты, если L представляетъ скрытую теплоту. Итакъ

$$dH \left\{ (\sigma_2 - \sigma_1)m + \sigma_1 \right\} dt + L . dm \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Если чрезъ E обозначимъ внутреннюю энергію, то первый законъ Термодинамики даетъ

$$dE = dH - p . dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Далѣе, если m и t опредѣляютъ состояніе, то v должно быть функціей m и t, или

$$dv = \left(\frac{dv}{dt}\right) . dt + \left(\frac{dv}{md}\right) dm.$$

Подставляя это значеніе въ выраженіе (3), а также принимая во вниманіе выраженіе (2), находимъ

$$dE = \left\{ (\sigma_2 - \sigma_1)m + \sigma_1 - p\left(\frac{dv}{dt}\right) \right\} dt +$$
$$+ \left\{ L - p\left(\frac{dv}{dm}\right) \right\} dm \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Принимая во вниманіе, что это выраженіе есть полный дифференціалъ, или, что

$$\frac{d}{dm}\left\{(\sigma_2-\sigma_1)\,m+\sigma_1-p\,\left(\frac{dv}{dt}\right)\right\}=\frac{d}{dt}\left\{L-p\left(\frac{dv}{dm}\right)\right\},$$

и замѣчая изъ выраженія (1), что $\left(\frac{dv}{dm}\right)=u$, имѣемъ

$$\frac{dL}{dt}+\sigma_1-\sigma_2=\frac{dp}{dt}\cdot\left(\frac{dv}{dm}\right)=u\,\frac{dp}{dt}\,\ldots\ldots\quad(5)$$

Далѣе, дѣля выраженіе (2) на t и, принимая во вниманіе, что $d\varphi=\frac{dH}{t}$ есть полный дифференціалъ, имѣемъ

$$\frac{d}{dm}\left\{\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\,m+\sigma_1}{t}\right\}=\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{t}\right)^{*}\ldots\ldots\ldots\quad(6),$$

или

$$\frac{dL}{dt}+v_1-v_2=\frac{L}{t}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(7).$$

Отсюда, принимая во вниманіе выраженіе (5), имѣемъ

$$\frac{L}{t}=u\,\frac{dp}{dt}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

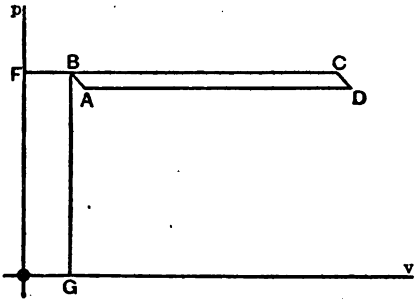
$$=(s_2-s_1)\,\frac{dp}{dt}\,.$$

87. Выводъ основнаго уравненія (8) болѣе скорымъ путемъ. На черт. 57 мы имѣемъ элементарный циклъ Карно для одного фунта вещества. Координаты точки B суть $FB=s_1$ — объемъ и $BG=p$ — давленіе одного фунта жидкости. При постоянной температурѣ t, а также и постоянномъ давленіи, вещество расширяется до тѣхъ поръ, пока оно не обратится все въ паръ — при объемѣ $BC=s_2$; CD представляетъ адіабатическое расширеніе до температуры $t-\delta t$ въ точкѣ D. DA представляетъ изотермическое сжатіе при температурѣ $t-\delta t$, и AB — конечный адіабатическій процессъ. Вертикальная высота параллелограмма равна $\delta t\,\frac{dp}{dt}$, а его площадь, представляющая полезную работу, равна $\delta t\,.\,\frac{dp}{dt}\,(s_2-s_1)$. Количество теплоты,

---

* $\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{t}\right)=\frac{t\,.\,\frac{dL}{dt}-L}{t_2}$, какъ это будетъ видно далѣе, когда будетъ дано правило для дифференцированія частнаго. Необходимо сознаться, что для полнаго пониманія пункта, трактующаго объ измѣненіи состоянія, студенты должны уже умѣть дифференцировать какъ произведеніе, такъ и частное.

затраченное при процессѣ BC, равно L, а потому коэффиціентъ полезнаго дѣйствія равенъ $\delta t \frac{dp}{dt}(s_2 - s_1) : L$. Съ другой стороны



Черт. 57.

онъ равенъ $\frac{\delta t}{t}$, такъ какъ мы имѣемъ циклъ Карно; отсюда мы и получаемъ уравненіе (8) †.

88. Энтропія. Изъ выраженія (6) мы находимъ, что $\sigma_2 - \sigma_1 = t \frac{}{dt}\left(\frac{L}{t}\right)$, и мы можемъ представить выраженіе (2) въ видѣ

$$dH = \sigma_1 dt + t\,.\,d\left(\frac{mL}{t}\right) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \quad (9).$$

Такимъ образомъ энтропія $d\varphi = \frac{dH}{t} = \frac{\sigma_1}{t}\,dt + d\left(\frac{mL}{t}\right)$,

или $$\varphi = \frac{mL}{t} + \int_{t0}^{t} \frac{t_1}{t}\,dt + \text{постоянное} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (10).$$

Въ случаѣ воды σ_1 очень близка къ постоянной, эквиваленту Джоуля (мы уже условились, что во всѣхъ случаяхъ тэплота выражается въ единицахъ работы), и

$$\varphi = \frac{mL}{t} + \sigma_1 \log\left(\frac{t}{t_0}\right) + \text{постоянное} \,.\,.\,. \quad (11).$$

Отсюда адіабатическій законъ для воды — пара слѣдующій:

$$\frac{mL}{t} + \sigma_1 \log\frac{t}{t_0} = \text{постоянному} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (12).$$

Прекраснымъ упражненіемъ для студентовъ будетъ слѣдующій численный примѣръ.

Пусть паръ, имѣющій температуру 165°C (или $t = 439$), расширяется адіабатически до 85°C (или $t = 359$). Принимаемъ $\sigma_1 = 1400$ и L выражаемъ въ единицахъ работы, или принимаемъ $\sigma_1 = 1$ и тогда L выражаемъ въ единицахъ теплоты. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ пользуемся таблицею значеній t и L.

1. Положимъ, что при высшей температурѣ $t_2 = 439$ $m_2 = 0.7$ (это число взято наугадъ). Вычислимъ m, положимъ при $t = 394$ и m_0 при $t_0 = 359$.

Выразимъ лучше L въ тепловыхъ единицахъ, такъ какъ формулу

$$L = 727 - 0.695t$$

легко запомнить.

Тогда (12) получаетъ видъ

$$\left(m_1 \frac{727}{t_1} - 0.695\right) + \log \frac{t_1}{t_0} = m_2 \left(\frac{727}{t_2} - 0.695\right) + \log \frac{t_2}{t_0},$$

$$m_1 = \frac{\log \frac{t_2}{t_2} + m_2 \left(\frac{727}{t_2} - 0.695\right)}{\frac{727}{t_1} - 0.695}.$$

Если мы опредѣляемъ m_0, то должны подставить сюда t_0 вмѣсто t_1.

Сдѣлавъ это, найдемъ соотвѣтствующія значенія v. Затѣмъ пробуемъ, подходитъ ли въ данномъ случаѣ законъ постоянному $pv^s =$ выражающій адіабатическое расширеніе даннаго вещества. Повторяемъ тотъ же расчетъ, подставляя вмѣсто 0.7 положимъ 0.8.

Способъ діаграммъ для t и φ даетъ возможность болѣе наглядно представить предъ студентами предметъ, но необходимо продѣлать одинъ или два примѣра подобныхъ вышеприведенному.

89. Рѣшить уравненіе $du = 0$, когда du есть полный дифференціалъ. Мы видимъ, что въ примѣрѣ

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0,$$

мы имѣемъ полный дифференціалъ, такъ какъ

$$\frac{d}{dy}(x^2 - 4xy - 2y^2) = -4x - 4y,$$

$$\frac{d}{dx}(y^2 - 4xy - 2x^2) = -4y - 4x,$$

т. е. обѣ прозводныя равны между собою. Итакъ первую часть уравненія можно представить въ видѣ

$$\left(\frac{du}{dx}\right).dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy.$$

Интегрируя $x^2 - 4xy - y^2$ относительно x, такъ какъ оно представляетъ $\left(\frac{du}{dx}\right)$, принимая y за постоянное, и прибавляя вмѣсто постояннаго нѣкоторую произвольную функцію y, мы получаемъ u въ видѣ.

$$u = {}^1/_3\, x^3 - 2x^2y - 2y^2x + \varphi(y).$$

Чтобы найти $\varphi(y)$, поступаемъ такъ: мы знаемъ, что $\left(\frac{du}{dy}\right) = y^2 - 4xy - 2x^2$,

а потому $\quad -2x^2 - 4yx + \frac{d}{dy}\varphi(y) = y^2 - 4xy - 2x^2.$

Отсюда $\quad \frac{d}{dy}\varphi(y) = y^2$, или $\varphi(y) = {}^1/_3 y^3.$

Итакъ $\quad u = {}^1/_3\, x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + {}^1/_3\, y^3 = c.$

Приравнявъ найденное для u выраженіе произвольному постоянному, мы рѣшили данное дифференціальное уравненіе.

Рѣшимъ тѣмъ же способомъ

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0. \quad \text{Отвѣтъ } x^2 - y^2 = cx.$$

$$\frac{2x\,.\,dx}{y^3} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0. \quad \text{Отвѣтъ } x^2 - y^2 = cy^3.$$

$$\left(3x^2 + 3y - \frac{4}{x^3}\right)dx + \left(3x - \frac{8}{y^3} + 3y^2\right)dy = 0.$$

Отвѣтъ $\quad x^5y^2 + x^2y^5 + 4x^2 + 2y^2 + 3x^3y^3 = cx^2y^2.$

90. Въ общемъ выводѣ выраженія (17) пункта 81 мы принимали, что **x и y совершенно независимыя перемѣнныя.** Мы можемъ теперь, если только намъ это желательно, **сдѣлать ихъ зависимыми одну отъ другой,** или отъ нѣкоторой третьей перемѣнной, z. Итакъ пусть, когда нѣкоторое независимое количество z получаетъ значеніе $z + \delta z$, x обращается въ $x + \delta x$, y въ $y + \delta y$ и наконецъ u въ $u + \delta u$. Раздѣлимъ уравненіе (16) пункта 81 почленно на δz и положимъ, что δz безконечно убываетъ, тогда (17) приметъ видъ:

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dz} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dz} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Положимъ, что $u = ax^2 + by^2 + cxy$,

и пусть $x = ez^n,\ y = gz^m$.

Тогда $\left(\frac{du}{dx}\right) = 2ax + cy$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = 2by + cx$, $\frac{dx}{dz} = nez^{n-1}$, $\frac{dy}{dz} =$ $= mgz^{m-1}$, и слѣдовательно

$$\frac{du}{dz} = (2ax + cy)\,nez^{n-1} + (2by + cx)\,mgz^{m-1}.$$

Въ полученномъ уравненіи мы можемъ, если намъ желательно, вмѣсто x и y подставить ихъ выраженія чрезъ z; тогда мы получимъ выраженіе, зависящее отъ одного только z.

Примѣры подобнаго рода заслуживаютъ вниманія потому, что ихъ можно рѣшать и по способу, приведенному гораздо раньше въ этой книгѣ. Въ самомъ дѣлѣ, въ выраженіе для u подставимъ вмѣсто x и y ихъ выраженія чрезъ z и мы получимъ $u = ae^2z^{2n} + bg^2z^{2m} + cegz^{n+m}$, отсюда

$$\frac{du}{dz} = 2nae^2z^{2n-1} + 2mbg^2z^{2m-1} + (n+m)\,cegz^{n+m-1},$$

тотъ же самый результатъ, который мы получили, примѣняя только что приведенный методъ. Студенты могутъ сами составить подобнаго рода примѣры.

Пусть, напримѣръ, $y = uv$, гдѣ u и v суть функціи x, тогда (1) даетъ намъ

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

формула, которой пользуются въ самыхъ различныхъ случахъ. См. пунк. 196.

Если въ выраженіи (1) y является постояннымъ, то получаемъ формулу

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dz},$$

которая также имѣетъ широкое примѣненіе. См. пунк. 198.

Примемъ въ выраженіи (1), что $z = x$ и y есть функція x, тогда

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Надѣюсь, что теперь уже нѣтъ необходимости указывать студенту, что $\frac{du}{dx}$ есть величина совершенно отличная отъ $\left(\frac{du}{dx}\right)$.

Примѣръ. Положимъ, что $u = ax^2 + by^2 + cxy$,
и пусть $y = gx^m$.

Тогда $\left(\frac{du}{dx}\right) = 2ax + cy, \left(\frac{du}{dy}\right) = 2by + cx, \frac{dy}{dx} = mgx^{m-1}$,

а потому (2) приметъ видъ

$$\frac{du}{dx} = (2ax + cy) + (2by + cx)\,mgx^{m-1}.$$

Тотъ же самый отвѣтъ мы можемъ получить скорѣе, если въ выраженіи для u выразимъ y чрезъ x, а именно, получимъ

$$u = ax^2 + bg^2x^{2m} + cgx^{m+1},$$

$$\frac{du}{dx} = 2ax + 2mbg^2x^{2m-1} + (m+1)cgx^m.$$

Если u есть функція трехъ независимыхъ перемѣнныхъ, то легко доказать подобно тому, какъ въ пунктѣ 81, что

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz \text{ . . . . } (3).$$

91. *Примѣръ.* **Положимъ, что масса m колеблется** съ одной степенью свободы подъ вліяніемъ пружины упругости a, такъ что, если x есть отклоненіе массы отъ положенія ея равновѣсія, то сила, съ которой пружина дѣйствуетъ на массу, будетъ ax; мы знаемъ, что потенціальная энергія равна $^1/_2ax^2$ (см. п. 26), и если v есть скорость массы въ тотъ же моментъ t, то кинетическая энергія равна $^1/_2mv^2$, а потому, пренебрегая массой пружины, имѣемъ, что полный запасъ энергіи равенъ

$$E = {}^1/_2\,mv^2 + {}^1/_2\,ax^2.$$

Когда $x = 0$, v имѣетъ наибольшее значеніе; когда $v = 0$, x имѣетъ наибольшее значеніе.

1. Предполагаемъ этотъ запасъ энергіи постояннымъ и дифференцируемъ по t, тогда

$$0 = mv\frac{dv}{dt} + ax\frac{dx}{dt} \text{ . . . . } (1),$$

или, такъ какъ $v = \frac{dx}{dt}$, то, замѣняя $\frac{dv}{dt}$ черезъ $\frac{d^2x}{dt^2}$, имѣемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}x = 0 \text{ . . . . } (2),$$

а это есть (см. пунк. 119) уже извѣстное намъ уравненіе простого гармоническаго движенія.

2. Если полный запасъ энергіи непостояненъ, но быстрота уменьшенія ея пропорціональна квадрату скорости, какъ въ случаѣ тренія

жидкости, или электромагнитнаго тренія, т. е. если $\frac{dF}{dt} = -Fv^2$, тогда (I) принимаетъ видъ $-Fv^2 = mv\frac{dv}{dt} + ax\frac{dx}{dt}$, или (2) обращается въ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{F}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{a}{m}x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Сравнить съ (1) пункта 142.

92. Подобнымъ же образомъ, если въ цѣпи съ самоиндукціей L и сопротивленіемъ R, соединяющей обкладки конденсатора емкости K, сила тока равна C, и если количество электричества въ конденсаторѣ въ моментъ t равно KV, такъ что $C = -K\frac{dV}{dt}$, то $\frac{1}{2}LC^2$ есть такъ называемая кинетическая энергія системы, и $\frac{1}{2}KV$— потенціальная энергія, и потеря энергіи въ системѣ въ секунду равна RC^2. Такимъ образомъ, если E есть запасъ энергіи въ нѣкоторый моментъ, то

$$E = \frac{1}{2}LC^2 + \frac{1}{2}KV^2.$$

$$\frac{dE}{dt} = -RC^2 = LC\frac{dC}{dt} + KV\frac{dV}{dt},$$

или

$$LC\frac{dC}{dt} - V.C + RC^2 = 0,$$

или

$$L\frac{dC}{dt} - V + RC = 0,$$

или

$$LK\frac{d^2V}{dt^2} + RK\frac{dV}{dt} + V = 0,$$

или

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{LK}V = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Дифференцируя это почленно и замѣняя $K\frac{dV}{dt}$ черезъ C, мы получимъ то же уравненіе, выраженное въ C. Сравнить съ (4) п. 145.

93. Масса, движущаяся со скоростью v, имѣетъ кинетическую энергію $\frac{1}{2}mv^2$. Если ея полный запасъ энергіи E, то

$$E = \frac{1}{2}mv^2.$$

Если быстрота уменьшенія E пропорціональна квадрату скорости, какъ при треніи въ жидкости при медленномъ движеніи, то

$$\frac{dE}{dt} = -Fv^2 = mv\frac{dv}{dt},$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F}{m}v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Мы имѣемъ подобное же уравненіе для исчезающаго тока въ электрическомъ проводникѣ, при чемъ его кинетическая энергія равна $\frac{1}{2} LC^2$, а паденіе энергіи равно въ секунду RC^2.

94. Во (2) пункта 90 принимаемъ, что u постоянное, и мы находимъ, напримѣръ, что, если $u = f(x, y) = c$, то

$$\left(\frac{df(x, y)}{dx}\right) + \left(\frac{df(x, y)}{dy}\right) \frac{dy}{dx} = 0,$$

такъ что, если $f(x, y) = c$ или $= 0$, мы легко получаемъ $\frac{dy}{dx}$.

1. Такъ, если $x^2 + y^2 = c$, $2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, или $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

2. Также, если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$, или $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

3. Если
$$u = Ax^m + By^n,$$
$$\frac{du}{dx} = mAx^{m-1} + nBy^{n-1}\frac{dy}{dx}.$$

Отсюда, если $u = 0$ или постоянному, мы имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{mAx^{m-1}}{nBy^{n-1}}.$$

4. Если $\quad u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $du = \frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy$.

5. Если $x^3 + y^3 - 3axy = b$, найти $\frac{dy}{dx}$. Отвѣтъ: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$.

6. Если
$$x \log y - y \log x = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\frac{x \log y - y}{y \log x - x}\right).$$

95. *Примѣръ.* Найти уравненіе касательной и нормали къ эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, въ точкѣ x_1, y_1 на кривой.

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}.$$

Отсюда уравненіе касательной есть

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1} \text{ или}$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}:$$

Такъ какъ x_1 и y_1 суть координаты точки на кривой, то это выраженіе равно 1. Отсюда уравненіе касательной есть

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Уклонъ нормали равенъ $\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}$, и потому уравненіе нормали есть

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}.$$

ПРИМѢЧАНІЕ КЪ ГЛАВѢ I.

Стр. 22. Если въ инженерномъ изслѣдованіи приходятъ къ такимъ математическимъ выраженіямъ, съ которыми трудно обращаться вслѣдствіе ихъ чрезмѣрной сложности, то часто замѣняютъ ихъ простой эмпирической формулой, дѣлая при этомъ ошибку, которая будетъ ничтожна въ тѣхъ предѣлахъ, въ которыхъ пользуются этой формулой. Иногда даже такими простыми выраженіями, какъ $a+bx$ или x^a съ ничтожной ошибкой можно замѣнить сложное выраженіе. Опытность въ такого рода подстановкахъ легко достигается, особенно въ такихъ вычисленіяхъ, гдѣ нѣкоторые члены формулы можно выразить численно, или когда дѣлаются численные опыты.

Упражненіе 1. Нижеслѣдующія наблюденныя числа должны слѣдовать закону $y=a+bx$, но есть ошибки въ наблюденіяхъ. Найти при помощи клѣтчатки самыя близкія къ истиннымъ значенія для a и b.

x	2	3	$4^1/_2$	6	7	9	12	13
y	5·6	6·85	9·27	11·65	12·75	16·32	20·25	22·33

Отв. $y=2{\cdot}5+1{\cdot}5x$.

Упражненіе 2. Предполагается, что нижеслѣдующія числа слѣдуютъ закону $y=\frac{ax}{1+sx}$. Нанести на клѣтчатку значенія $\frac{y}{x}$ и y, которыя слѣдуютъ закону $\frac{y}{x}+sy=a$ и такимъ образомъ найти самыя близкія къ истиннымъ значенія a и s.

x	0·5	1	2	0·3	1·4	2·5
y	0·78	0·97	1·22	0·55	1·1	1·24

Отвѣтъ $\frac{3x}{1+2x}=y$.

Упражненіе 3. Пусть p давленіе въ фунтахъ на кв. дюймъ и v объемъ въ куб. фут. одного фунта насыщеннаго пара;

p	6·86	14·70	28·83	60·40	101·9	163·3	250·3
v	53·92	26·36	14·00	6·992	4·28	2·748	1·853

Нанеся логариѳмы p и v на клѣтчатку, доказать справедливость выраженія $pv^{1 \cdot 0646} = 479$.

Упражненіе 4. Въ нижеслѣдующей таблицѣ помѣщены результаты опытовъ, изъ которыхъ каждый продолжался около 4-хъ часовъ; I индикаторная сила въ паровыхъ лошадяхъ машины, передающей B лошадиныхъ силъ динамомашинамъ, которыя развиваютъ E лошадиныхъ силъ (въ видѣ тока); вѣсъ пара, расходуемаго въ часъ, W фунтовъ, вѣсъ угля, расходуемаго въ часъ, C фунтовъ (машина регулировалась посредствомъ измѣненія давленія пара). Показать, что приблизительно $W = 800 + 21I$; $B = 0.95I - 18$; $E = 0{\cdot}93B - 10$: $C = 4{\cdot}2I - 62$.

I	B	E	W	C
190	163	143	4800	730
142	115	96	3770	544
108	86	69	3080	387
65	43	29	2155	218
19	0	0	1220	—

Стр. 40. Многіе мнѣ указывали на то, что я долженъ былъ дать это доказательство помимо теоремы бинома, которая могла быть изложена въ видѣ примѣра ряда Тейлора. Но, не смотря на выдающуюся опытность моихъ критиковъ, я полагаю, что мой методъ лучше,— хотя я и знаю, что студентъ не доказывалъ еще теоремы бинома, я предлагаю ему провѣрить и убѣдиться въ ея правильности. Вотъ наиболѣе простое, какъ мнѣ кажется, доказательство, въ которомъ можно обойтись безъ бинома.

Пусть $\quad y = x^n,\ x + \delta x = x_1,\ y + \delta y = y_1.$

1) Положимъ, что n — положительное цѣлое число; тогда

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x} = x_1^{\,n-1} + x x_1^{\,n-2} + \ldots + x^{n-1}.$$

Въ предѣлѣ, когда δx безконечно убываетъ, и x_1 приближается къ x, лѣвая часть обращается въ $\frac{dy}{dx}$, а правая дѣлается равной $x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots n$ членовъ; такъ что $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

2) Положимъ, что n положительная дробь равная $\frac{l}{m}$, гдѣ l и m

положительныя цѣлыя числа. Мы имѣемъ $\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x} = \dfrac{x_1^{\frac{l}{m}} - x^{\frac{l}{m}}}{x_1 - x} = \dfrac{z_1^{\,l} - z^l}{z_1^{\,m} - z^m}$, гдѣ $x^{\frac{1}{m}} = z$, $x_1 = z_1^{\,m}$ и т. д.

$$\frac{dy}{dx} = \text{предѣлу} \frac{(z_1 - z)(z_1^{\,l-1} + z \,.\, z_1^{\,l-2} + \,.\, \ldots + z^{l-1})}{(z_1 - z)(z_1^{\,m-1} + z \,.\, z_1^{\,m-2} + \ldots \,. + z^{m-1})}$$

$$= \frac{lz^{l-1}}{mz^{m-1}} = \frac{l}{m} z^{l-m} = nx^{\frac{l}{m}-1} = nx^{n-1}.$$

3) Положимъ, что n есть нѣкоторое отрицательное число $= -m$, гдѣ m положительное, тогда, замѣчая, что $x_1^{-m} - x^{-m} = \dfrac{x^m - x_1^{\,m}}{x_1^{\,m} x^m}$,

мы имѣемъ
$$\frac{x_1^{-m} - x^{-m}}{x_1 - x} = -\frac{1}{x_1^{-m} x^m} \,.\, \frac{x_1^{\,m} - x^m}{x_1 - x}\,.$$

Но предѣлъ $\dfrac{x_1^{\,m} - x^m}{x_1 - x} = mx^{m-1}$ на основанiи 1-го и 2-го случая, будетъ ли m цѣлое или дробное,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{2m}} \quad mx^{m-1} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Такимъ образомъ мы доказали, что $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, гдѣ n какое угодно постоянное, положительное или отрицательное, цѣлое или дробное.

ГЛАВА II.

e^x и $\sin x$.

97. Законъ сложныхъ процентовъ. Рѣшеніе огромнаго числа инженерныхъ задачъ зависитъ только отъ нашего умѣнья дифференцировать x^n. Я далъ нѣсколько примѣровъ. Конечно гораздо легче запомнить, что производная отъ x^n есть nx^{n-1}, чѣмъ писать сотни страницъ съ цѣлью избѣжать этой маленькой частицы знанія.

Теперь мы подходимъ къ функціи совсѣмъ другого рода— функціи e^x, въ которой постоянное количество e (e есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ и равно 2·7183) возведено въ степень *перемѣннаго* значенія. Мы вычисляемъ логариѳмы и показательныя функціи помощью рядовъ, и въ алгебрѣ доказывается, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{x^4}{1 . 2 . 3 . 4} \text{ и т. д.}$$

Постоянное произведеніе 1 . 2 . 3 . 4 или 24 обозначается помощью 24 или иногда 4!

Теперь дифференцируемъ почленно e^x, очевидно мы получимъ

$$0 + 1 + x + \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \text{ и т. д.},$$

такимъ образомъ производная отъ e^x равна самой функціи e^x. Подобнымъ же образомъ мы можемъ доказать, что производная отъ e^{ax} есть ae^{ax}. Это единственная функція изъ извѣстныхъ намъ, производная которой пропорціональна величинѣ ея самой; но въ природѣ есть масса явленій, обнаруживающихъ это свойство. Лордъ Кельвинъ опредѣляетъ эти явленія, какъ «слѣдующія закону сложныхъ процентовъ».

Замѣтимъ, что если

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

т. е. производная y пропорціональна самому y, то

$$y = be^{ax} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

гдѣ b есть нѣкоторая постоянная; b, очевидно, представляетъ значеніе y, при $x = 0$.

Здѣсь опять не мѣшало бы студенту пояснить этотъ выводъ помощью графическихъ и численныхъ соображеній. Начертите кривую $y = e^x$ и докажите, что ея уклонъ равенъ ея ординатѣ. Или возьмите для x значенія, положимъ, 2, 2·001, 2·002, 2·003 и т. д. и вычислите соотвѣтствующія величины y, пользуясь таблицей логариѳмовъ. (Это упражненіе само по себѣ полезно, ибо многіе на практикѣ не всегда достаточно быстро умѣютъ справляться съ логариѳмами).

Теперь раздѣлите приращенія y на соотвѣтствующія приращенія x.

Находчивый студентъ можетъ найти и другіе вѣроятно болѣе сложные способы, ведущіе къ тому, чтобы освоиться съ этой идеей. Чѣмъ сложнѣе этотъ методъ, тѣмъ больше онъ будетъ представлять цѣны для него, разъ онъ будетъ его собственнымъ открытіемъ, но только пусть онъ поостережется, и не станетъ мучить другихъ, думая ихъ просвѣтить, посвящая ихъ въ свои сложные выводы.

98. Намъ можетъ быть будетъ яснѣе наша задача, если мы разберемъ **нѣсколько примѣровъ на законъ сложныхъ процентовъ.**

Наши читатели—или электрики или инженеры механики. Если они электрики, то они въ то-же время должны быть и механиками.

Инженеры механики, которые ничего не знаютъ по электричеству, могутъ пропустить задачи на электричество, но имъ можно посовѣтовать заняться ими; въ то же время не мѣшаетъ вспомнить, что одна задача тщательно разработанная научитъ больше, чѣмъ тридцать разобранныхъ слегка.

Примѣръ 1. **Электрическій конденсаторъ** постоянной емкости K, черт. 58, разряжается черезъ проводникъ съ большимъ сопротивленіемъ R. Пусть v есть разность потенціаловъ (въ нѣкоторый моментъ) между обкладками конденсатора, такъ положимъ. что на нашемъ черт. 58 одна обкладка имѣетъ потенціалъ v, другая 0.

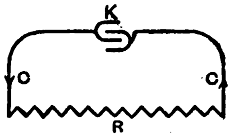
Начертимъ стрѣлки, показывающія направленіе тока C въ проводникѣ, тогда $C = v : R$.

Но q количество электричества въ конденсаторѣ равно Kv, и величина *убыванія* q въ секунду $-\frac{dq}{dt}$ или $-K\frac{dv}{dt}$, также выражаетъ ту же силу тока. Отсюда

$$-K\frac{dv}{dt} = \frac{v}{R}$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{KR}v.$$



Черт. 58.

т. е. величина *убыванія* v въ секунду, пропорціональна v, и этотъ законъ независимо отъ того, будетъ ли тутъ уменьшеніе или увеличеніе, мы называемъ закономъ сложныхъ процентовъ. Отсюда мы заключаемъ, что имѣемъ здѣсь дѣло съ показательной функціей и на основаніи нашего маленькаго опыта, мы видимъ, что это соотвѣтствуетъ случаю (1), откуда слѣдуетъ на основаніи (2)

$$v = be^{-\frac{1}{KR}t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

На основаніи этого мы получимъ правило для опредѣленія сопротивленія изоляціи кабеля или конденсатора.

Такъ какъ $(\log b - \log v) = \frac{t}{KR}$,

то, если v_1 есть потенціалъ въ моментъ t_1 и v_2 — потенціалъ въ моментъ t_2, имѣемъ

$$KR(\log b - \log v_1) = t_1$$
$$KR(\log b - \log v_2) = t_2$$

Вычитая, получимъ

$$KR(\log v_1 - \log v_2) = t_2 - t_1,$$

т. е.
$$R = (t_2 - t_1) : K \log \frac{v_1}{v_2}.$$

Необходимо сказать, что неперовъ логариѳмъ числа n—log n равенъ обыкновенному логариѳму $\log_{10} n$, умноженному на 2·3026.

Примѣръ, подобный этому, тщательно изученный инженеромъ, стоитъ двадцати такихъ задачъ, пройденныхъ коекакъ.

Примѣръ 2. **Ньютоновъ законъ охлажденія.** Представимъ себѣ тѣло при температурѣ v (сравнительно съ температурой окружающихъ тѣлъ), теряющее теплоту, при чемъ скорость этого убыванія пропорціональна v.

Такимъ образомъ пусть $\dfrac{dv}{dt} = -av$,

гдѣ t есть время. Тогда на основаніи (2)

$$v = be^{-a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

или
$$\log b - \log v = at.$$

Пусть въ моментъ t_1 температура будетъ v_1, а въ моментъ t_2—v_2, тогда $\log v_1 - \log v_2 = a(t_2 - t_1)$, т. е. a можетъ быть опредѣлено опытомъ, какъ равное

$$\log \frac{v_1}{v_2} . (t_2 - t_1).$$

Примѣръ 3. Стержень (вродѣ съуживающагося крученаго каната или вродѣ желѣзнаго **наконечника въ рукавахъ насосовъ**, похожій по внѣшнему виду на каменныя подставки подъ лампады въ церквахъ) постепенно съуживается книзу въ зависимости отъ собственнаго вѣса, такъ, чтобы въ любой точкѣ его получалось одинаковое растягивающее напряженіе f фунтовъ на квадр. дюймъ. Если y есть поперечное сѣченіе на разстояніи x отъ его нижняго конца, а $y + \delta y$ его поперечное сѣченіе на разстояніи $x + \delta x$ отъ нижней оконечности, то $f . \delta y$ очевидно выразитъ вѣсъ малаго объема, заключеннаго между x и $x + \delta x$. Этотъ объемъ равенъ $\delta x . y$, а, если w есть вѣсъ единицы объема, то

$$f \,.\, \delta y = w \,.\, y \,.\, \delta x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{w}{f} y.$$

Отсюда, какъ и раньше, $y = be^{\frac{wx}{f}}$ . . . . (5).

Если при $x = 0$, $y = y_0$ есть поперечное сѣченіе какъ разъ достаточное, чтобы выдержать грузъ W, подвѣшенный книзу (очевидно $f \cdot y_0 = W$), то $y_0 = b$, такъ какъ $e^0 = 1$.

Нечего пояснять, что (5) выражаетъ законъ, по которому долженъ съуживаться стержень.

Примѣръ 4. **Сложные проценты**. 100 фунтовъ отданы взаймы по 3% годовыхъ, въ концѣ года сумма возрастетъ до 103 фунтовъ. Такъ какъ въ теченіи слѣдующаго года проценты будутъ наростать на увеличившійся капиталъ, то въ этотъ годъ приростъ будетъ больше, и будетъ все увеличиваться съ каждымъ слѣдующимъ годомъ. Здѣсь присоединеніе процента дѣлается чрезъ каждые 12 мѣсяцевъ, но оно можетъ происходить каждые шесть или три мѣсяца, еженедѣльно, ежедневно, или каждую секунду.

Въ природѣ процессы совершаются обыкновенно даже непрерывнѣе, чѣмъ въ послѣднемъ случаѣ.

Представимъ себѣ, что проценты прибавляются къ капиталу непрерывно, а не скачками каждый годъ, считая по $r\ \%$ въ годъ. Пусть P означаетъ сумму капитала къ концу t лѣтъ.

Тогда δP во время δt будетъ $\frac{r}{100} P \,.\, \delta t$ или $\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100} P$,

а отсюда, на основаніи (2), получимъ

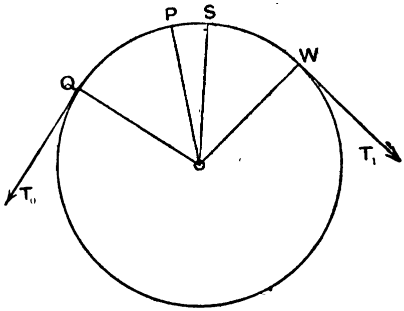
$$P = be^{\frac{rt}{100}},$$

гдѣ $b = P_0$,— капиталу въ моментъ $t = 0$.

Примѣръ 5. **Треніе ремня по шкиву**. Когда студенты дѣлаютъ опыты съ подобнаго рода треніемъ, они должны позаботиться о неподвижности шкива, чтобы можно было замѣтить начало скольженія.

Натяженіе ремня въ точкѣ W обозначимъ T_1; оно не только должно преодолѣвать натяженіе T_0, но также и треніе между ремнемъ и шкивомъ.

Разсмотримъ натяженіе T ремня въ точкѣ P, черт. 59, когда уголъ QOP равенъ θ; а также натяженіе $T + \delta T$ въ точкѣ S, при углѣ QOS равномъ $\theta + \delta\theta$.



Черт. 59.

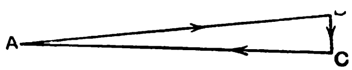
Черт. 60 представляетъ часть OPS въ сильно увеличенномъ видѣ, при чемъ $\delta\theta$ очень мало. Разсматривая давленіе, прижимающее малый отрѣзокъ ремня PS къ шкиву и давая PS все меньшіе размѣры, мы видимъ, что равнодѣйствующая этого давленія равна $T \,.\, \delta\theta$*, такъ что сила тренія, если μ — коэффиціентъ тренія, будетъ $\mu \; T \,.\, \delta\theta$.

Это и есть та величина, которую должно превосходить δT. Когда δT достигло величины $\mu \; T \,.\, \delta\theta$, то въ этотъ моментъ только что начинается скольженіе.

Въ этомъ случаѣ $\mu \; T \,.\, \delta\theta = \delta T$ или $\dfrac{dT}{d\theta} = \mu T$ — законъ сложныхъ процентовъ.

---

* Найдемъ равнодѣйствующую двухъ равныхъ силъ T, составляющихъ между собой уголъ $\delta\theta$. Эти три силы будутъ параллельны сторонамъ равнобедреннаго треугольника, изображеннаго на черт. 61,

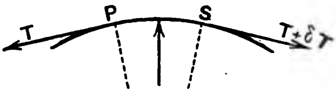


Черт. 61.

гдѣ $AB = CA$ представляетъ T, уголъ $BAC = \delta\theta$ и BC представляетъ собой равнодѣйствующую. Теперь очевидно, что по мѣрѣ уменьшенія $\delta\theta$ отношеніе $BC : AB$ все болѣе приближается къ величинѣ $\delta\theta$, и потому равнодѣйствующая становится равной $T \,.\, \delta\theta$.

Отсюда получаемъ $T = be^{\mu\theta}$. Положимъ теперь $T = T_0$, когда $\theta = 0$ и $T = T_1$, когда $\theta = QOW$ или θ_1, и мы получимъ $T_0 = b$, $T_1 = T_0 e^{\mu\theta_1}$.

Разсчитывая количество лошадиныхъ силъ H, передаваемыхъ шкиву помощью ремня, мы должны помнить, что $H = (T_1 - T_0)\ V : 33000$, если T_1 и T_0 выражены въ фунтахъ, и V есть скорость ремня въ футахъ въ минуту.



Черт. 60.

Кромѣ того отъ величины силы T_1 зависитъ прочность ремня: на основаніи нашихъ выводовъ мы получаемъ общеизвѣстное правило для расчета этой прочности ремня.

Примѣръ 6. **Атмосферное давленіе.** Пусть на вытотѣ h футъ надъ даннымъ горизонтомъ давленіе атмосферы равно p фунтовъ на квадр. футъ, и на высотѣ $h + \delta h$, $p + \delta p$ (какъ легко видѣть, δp отрицательно). Давленіе на высотѣ h болѣе давленія соотвѣтствующаго горизонту $h + \delta h$ на величину вѣса воздуха, наполняющаго объемъ равный δh куб. футъ. Если вѣсъ одного куб. фута воздуха въ фунтахъ будетъ w, то $-\delta p = w\,.\,\delta h$. Но $w = cp$, гдѣ c есть нѣкоторая постоянная въ случаѣ, **если температура постоянна.** Отсюда $-\delta p = c\,.\,p\,.\,\delta h \ldots .(1)$ или $\frac{dp}{dh} = -cp$. Слѣдовательно, какъ и раньше, мы имѣемъ случай закона сложныхъ процентовъ; быстрота уменьшенія давленія по мѣрѣ поднятія вверхъ, или увеличенія его по мѣрѣ того, какъ мы опускаемся внизъ, пропорціональна самому давленію. Отсюда $p = ae^{-ch}$, гдѣ a есть нѣкоторая постоянная. Если $p = p_0$, когда $h = 0$, то $a = p_0$, такъ что законъ выразится уравненіемъ

$$p = p_0 e^{-ch} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Что касается до c, то легко видѣть, что оно равно $\frac{w_0}{p_0}$, при чемъ w_0 представляетъ собой вѣсъ одного кубическаго фута воздуха при давленіи p_0.

Если температура t (абсолютная) постоянна, и w_0 есть

вѣсъ куб. фута воздуха при 0° C или 274° абсолютной температуры, то c равно $\frac{w_0 \,.\, 274}{p_0 \,.\, t}$.

Если w слѣдуетъ адiабатическому закону, то $pw^{-\gamma}$ будетъ постоянно, отсюда $w = cp^{1/\gamma}$, гдѣ $\gamma = 1{\cdot}414$ для воздуха.

Тогда уравненiе (1) принимаетъ видъ $-\delta p = cp^{1/\gamma}\,\delta h$ или $-\frac{\delta p}{p^{1}/\gamma} = c\delta h$, или $-\int\frac{dp}{p^{1}/\gamma} = ch$, отсюда $\frac{-\gamma}{\gamma - 1}\,p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = ch + C$. Если $p = p_0$ при $h = 0$, то мы найдемъ C и получимъ

$$p^{1-\frac{1}{\gamma}} = p_0^{1-\frac{1}{\gamma}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} ch \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (3),$$

что представляетъ болѣе правильный законъ для атмосфернаго давленiя, убывающаго кверху.

Замѣтимъ, что, если мы имѣемъ адiабатическiй законъ $pv^{\gamma} = b$ — постоянной, то $pv = Rt$; отсюда слѣдуетъ, что абсолютная температура пропорцiональна $p^{1-\frac{1}{\gamma}}$. Такимъ образомъ уравненiе (3) обратится въ

$$t = t_0 - \frac{1}{R}\frac{\gamma - 1}{\gamma} h.$$

То есть величина убыли температуры въ такой массѣ газа постоянна на каждый футъ поднятiя вверхъ. Сравнить § 74 (4), когда $v = 0$.

Примѣръ 7. **Маховое колесо, движенiе котораго задерживается тренiемъ о жидкость.**

Пусть α скорость движенiя въ радiанахъ, I моментъ инерцiи колеса.

Положимъ, что сопротивленiе движенiю даетъ моментъ вокругъ оси, пропорцiональный скорости, положимъ $F\alpha$, тогда

$$F\alpha = -I \times \text{угловое ускоренiе} \;.\;.\;.\;.\;.\;. (1),$$

или $$I\frac{d\alpha}{dt}+F\alpha=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2),$$

откуда $$\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{F}{I}\alpha.$$

Слѣдовательно быстрота уменьшенія угловой скорости α пропорціональна α, т. е. мы имѣемъ случай закона сложныхъ процентовъ или $\alpha=\alpha_0 e^{-\frac{F}{I}t}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$,

гдѣ α_0 есть угловая скорость въ моментъ $t=0$.

Сравнимъ это съ случаемъ тренія махового колеса **о твердое тѣло.** Пусть a будетъ постоянный моментъ отъ тренія.

Вмѣсто (1) получимъ

$$a=-I\frac{d\alpha}{dt},$$

или $$\frac{d\alpha}{dt}+\frac{a}{I}=0,$$

отсюда $$\alpha=-\frac{at}{I}+\text{постоянное},$$

или $$\alpha=\alpha_0-\frac{at}{I}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4),$$

гдѣ α_0 есть угловая скорость при $t=0$.

Возвращаясь къ случаю тренія о жидкость, если назовемъ M перемѣнный моментъ отъ тренія, то будемъ имѣть

$$M=F\alpha+I\frac{d\alpha}{dt}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5).$$

Обратимъ вниманіе на аналогію этого случая съ слѣдующимъ закономъ для электрической цѣпи.

Примѣръ 8. **Замкнутый электрическій проводникъ.**

Существуетъ законъ Ома для постоянныхъ токовъ, именно $V=RC$, гдѣ R есть сопротивленіе цѣпи, C есть сила тока проходящаго въ ней, V — вольтажъ.

Обыкновенно, R выражается въ омахъ, C въ амперахъ, V въ вольтахъ. Когда токъ перемѣнный, то этотъ законъ

получаетъ такой видъ

$$V = RC + L\frac{dC}{dt} \dots\dots\dots\dots (1),$$

гдѣ $\frac{dC}{dt}$ есть величина приращенія силы тока въ секунду, а L представляетъ самоиндукцію цѣпи, выраженную въ генри.

Очевидно, что L есть электровозбудительная сила, дѣйствующая обратно направленію тока, когда сила его возрастаетъ каждую секунду на одинъ амперъ.

1. Если $V=0$ въ (1)

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{L}C,$$

что представляетъ собою законъ сложныхъ процентовъ. Слѣдовательно

$$C = C_0 e^{-\frac{R}{L}t} \dots\dots\dots\dots (2).$$

2. Если $C = a + be^{-gt}$, то

$$\frac{dC}{dt} = -gbe^{-gt},$$

такъ что изъ (1)

$$V = Ra + (Rb - Lgb)\, e^{-gt}.$$

Теперь пусть $R = Lg$ или $g = \frac{R}{L}$, тогда мы получимъ $V = Ra$, т. е. электровозбудительная сила можетъ оставаться постоянной, хотя сила тока и будетъ мѣняться. Оставляя тѣ-же величины и полагая электровозбудительную силу постоянной, равной V_0, такъ что $a = \frac{V_0}{R}$, мы найдемъ

$$C = \frac{V_0}{R} + be^{-\frac{R}{L}t} \dots\dots\dots (3).$$

Если примемъ $C = 0$ при $t = 0$,

тогда $b = -\frac{V_0}{R}$, и на основаніи этого мы можемъ написать

$$C = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Кривая, показывающая, какъ C возрастаетъ при постоянной электровозбудительной силѣ, должна быть вычерчена для какого либо частнаго случая, начиная съ $t = 0$.

Такъ, напримѣръ, вычертите ее при $V_0 = 100$, $R = 1$, $L = 0{,}01$. Какая сила тока получится окончательно?

99. Легкія упражненія въ дифференцированіи и интегрированіи e^{ax}.

1. Пользуясь формулой пунк. 70, найти **радіусъ кривизны** кривой $y = e^x$, при $x = 0$. Отв. $r = \sqrt{8}$.

2. Точка x_1, y_1 находится на кривой $y = be^{\frac{x}{a}}$, найти уравненіе **касательной** въ этой точкѣ.

$$\text{Отв. } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1}{a}.$$

Найти уравненіе **нормали**, проходящей чрезъ эту точку.

$$\text{Отв. } \frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a}{y_1}.$$

Найти длину **поднормали**. Отв. $y\frac{dy}{dx}$ или $\frac{y^2}{a}$.

Найти длину **подкасательной.** Отв. $y : \frac{dy}{dx}$ или a.

3. Найти **радіусъ кривизны цѣпной линіи** $y = \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c})$, въ любой точкѣ.

$$\text{Отв. } r = \frac{y^2}{c}.$$

Въ вершинѣ при $x = 0$, $r = c$.

4. Пусть $y = Ae^{iax}$, гдѣ i означаетъ $\sqrt{-1}$.

Показать, что, если i принять за алгебраическую вели-

чину, такъ что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. $i^5 = i$, и т. д., то $\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$.

5. Найти α подъ условіемъ, чтобы уравненіе $y = Ae^{ax}$ было справедливо, когда $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$.

Показать, что въ данномъ случаѣ получится два значенія для α, и что

$$y = Ae^{-4x} + Bi^{-3x}.$$

6. Найти **подкасательную и поднормаль въ цѣпной линіи** $y = \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c})$ или, какъ иногда пишутъ, $y = c \cos h\, x/c$

Отвѣтъ: подкасательная равна $c \cosh \frac{x}{c}$ или

$$c\left(\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{e^{x/c} - e^{-x/c}}\right);$$

поднормаль равна $\frac{c}{2} \sinh \frac{2x}{c}$ или

$$\frac{c}{4}\left(e^{2x/c} - e^{-2x/c}\right).$$

7. Если условимся называть разстояніе PS, черт. 8, длиной тангенса, то длина тангенса вышеуказанной цѣпной линіи будетъ

$$\frac{c}{2} \cosh^2 \frac{x}{c} : \sinh \frac{x}{c}.$$

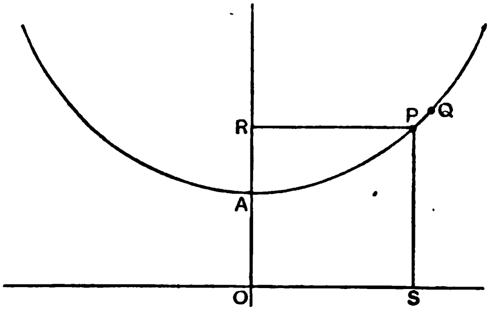
Длина PQ можетъ быть названа длиной нормали и для цѣпной линіи она будетъ равна $c \cosh^2 \frac{x}{c}$ или y^2/c.

8. Найти **длину дуги** цѣпной линіи $y = \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c})$.

Правило для этого дано въ п. 38. Черт. 62 показываетъ видъ кривой, причемъ O начало координатъ, а разстояніе AO равно c. Точка R имѣетъ своими координатами x и y.

Теперь $\frac{dy}{dx} = {}^1/_2\,(e^{x/c} - e^{-x/c})$;

возводя это въ квадратъ, прибавляя къ 1 и извлекая квадратный корень, получимъ ${}^1/_2\,(e^{x/c} + e^{-x/c})$. Интегралъ этого выраженія равенъ $\frac{c}{2}\,(e^{x/c} - e^{-x/c})$ и представляетъ собой длину дуги AP, такъ какъ онъ равенъ 0 при $x = 0$. Мы можемъ написать это такъ: $s = c \sinh x/c$.



Черт. 62.

9. Найти **площадь цѣпной линіи** между OA и SP, черт. 62.

$$\text{Площадь} = \int_0^{OS} \frac{c}{2}\,(e^{x/c} + e^{-x/c})\,dx,$$

или $$\frac{c^2}{2}\Big[e^{x/c} - e^{-x/c}\Big]_0^{OS} \text{ или } \frac{c^2}{2}\,(e^{\frac{OS}{c}} - e^{-\frac{OS}{c}}).$$

Иначе говоря, площадь, ограниченная нѣкоторой ординатой при x, равна $c^2 \sinh x/c$.

Цѣпная линія $y = \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c})$ вращается вокругъ оси x, найти площадь образованной такимъ образомъ поверхности, имѣющей форму песочныхъ часовъ. См. § 48.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,(e^{x/c} - e^{-x/c}) \text{ и } \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\,(e^{x/c} + e^{-x/c})$$

$$\text{Площадь} = \frac{\pi c}{2}\int (c^{x/c} + c^{-x/c})^2 . dx =$$

$$= \frac{\pi c^2}{4}\,(c^{2x/c} - c^{-2x/c}) + \pi c x,$$

въ предѣлахъ между ординатами при $x = x$ и $x = 0$.

Любопытно, что форма нѣкоторыхъ **вулкановъ** такова, что ихъ сѣченіе какъ будто подчиняются закону сложныхъ процентовъ на подобіе наконечниковъ рукавовъ насосовъ.

Положимъ, что даны радіусы вершины и основанія такого вулкана равные соотвѣтственно a и b, и высота его h, **найти объемъ**. См. п. 46. Принявъ ось вулкана за ось x; получимъ, что кривая $y=be^{cx}$, образуетъ вращеніемъ вокругъ этой оси поверхность горы при условіи, что

$$c=\frac{1}{h}\log\frac{a}{b}.$$

$$\text{Объемъ}=\pi\int_0^h b^2 \,.\, e^{2xc}\,.\, dx=\frac{\pi b^2}{2c}\Big[_0^h e^{2cx}\Big]=$$

$$=\frac{\pi b^2}{2c}(a^{2ch}-1).$$

Но $a=be^{ch}$, такъ что нашъ отвѣтъ будетъ $\frac{\pi}{2c}(a^2-b^2)$.

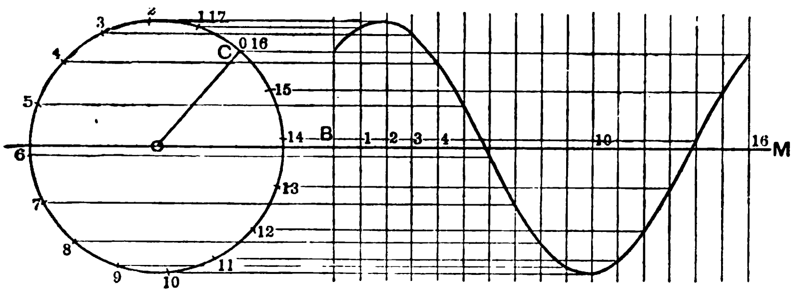
100. Гармоническія функціи.

Студентамъ уже раньше рекомендовалось вычертить на клѣтчаткѣ **синусоиды** подобныя $y=a\sin(bx+e)\ldots(1)$ и выяснить себѣ значенія величинъ a, b и e. Можно было бы не говорить болѣе объ этомъ. Но вычертимъ вновь эту кривую. Почему она называется иногда кривой косинуса? (Предположимъ, что e равно $\frac{\pi}{2}$ или $90°$). Замѣтимъ, что, какъ бы велико ни было x, синусъ $(bx+e)$ не можетъ никогда быть болѣе $+1$ или менѣе -1. Студентъ конечно знаетъ, что $\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{4}$ (или $45°$)$=0{,}707$, $\sin\frac{\pi}{2}$ (или $90°$)$=1$, $\sin\frac{3\pi}{4}$ (или $135°$)$=0{,}707$, $\sin\pi$ (или $180°$)$=0$, $\sin\frac{5\pi}{4}$ (или $225°$)$=-0{,}707$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ (или $270°$)$=-1$, $\sin\frac{7\pi}{4}$ (или $315°$)$=-0{,}707$, $\sin 2\pi$ (или $360°$) равенъ опять нулю, а затѣмъ $\sin\theta=\sin(\theta-2\pi)$. Даже этихъ значеній почти достаточно, чтобы представить себѣ волнообразную

форму кривой. Но, такъ какъ синусъ никогда не можетъ быть болѣе 1, то наибольшее и наименьшее значеніе y будетъ a и $-a$. Поэтому a называется **амплитудой** кривой или функціи.

При $x=0$, $y=a \sin e$. Это даетъ намъ значеніе e. Другой путь его нахожденія—это предположеніе, что, когда $bx=-e$ или $x=-\frac{e}{b}$, тогда $y=0$. Когда x означаетъ время, или когда bx есть уголъ, описанный мотылемъ или эксцентрикомъ, e носитъ различныя названія; инженеры, изучающіе движеніе золотника, называютъ его *угломъ предваренія* золотника; инженеры—электрики называютъ его *опереженіемъ* или (когда оно отрицательно) *запаздываніемъ фазы*.

Замѣтимъ, что когда $bx=2\pi$, мы имѣемъ то же положеніе, что и при $x=0$, поэтому обыкновенно $\frac{2\pi}{b}$ называютъ періодической величиной x.



Черт. 63.

Кромѣ метода, даннаго въ пун. 9, я предлагаю студенту вычертить кривую по слѣдующему способу. Достаточно небольшое знакомство съ элементарной тригонометріей, чтобы убѣдиться, что онъ даетъ тотъ же самый результатъ. Это совершенно то же, что дѣлаютъ при вычерчиваніи проекціи спирали (напримѣръ винтообразной линіи) въ практическомъ черченіи.

Проведемъ прямую OM.

Опишемъ кругъ около точки O радіуса a. Отложимъ уголъ BOC равный e. Раздѣлимъ окружность круга на нѣсколько равныхъ частей, означивъ точки дѣленія цифрами 0, 1, 2, 3, и т. д. Мы можемъ также назвать эти точки 16, 17, 18 и т. д. или 32, 33, 34 и т. д., когда мы обошли кругъ одинъ, два или болѣе разъ. Отложимъ нѣсколько равныхъ отрѣзковъ на прямой линіи отъ B къ M, и обозначимъ ихъ нумерами 0, 1, 2 и т. д. Теперь нанесемъ вертикальныя и горизонтальныя проекціи и получимъ точки кривой. Разстояніе BM представляетъ въ томъ же масштабѣ или въ другомъ періодическую величину x или $2\pi/b$.

Если представимъ себѣ, что OC есть мотыль, равномѣрно вращающійся обратно направленію часовой стрѣлки въ вертикальной плоскости бумаги, то y въ (1) будетъ выражать разстояніе C отъ OM, bx — уголъ, составляемый въ нѣкоторый моментъ OC съ OM, и, если x означаетъ время, то b выражаетъ угловую скорость мотыля, а $2\pi/b$ представитъ время одного оборота мотыля или продолжительность періода движенія, y есть отодвиженіе въ нѣкоторый моментъ отъ средняго положенія ползуна, приводимаго въ вертикальное движеніе тягой безконечной длины, проведенной къ нему отъ точки C.

Простое гармоническое движеніе можетъ быть опредѣлено, какъ такое, которое изображается уравненіемъ. $s = a \sin (bt + e)$, гдѣ s есть разстояніе отъ нѣкотораго средняго положенія, a — амплитуда, e опереженіе или запаздываніе фазы или предвареніе, а b равно $2\pi/T$ или $2\pi f$, гдѣ T есть продолжительность періода, или f есть число періодовъ въ единицу времени. Или оно можетъ быть опредѣлено, какъ движеніе нѣкоторой точки, совершающей равномѣрное движеніе по кругу, проектирующееся на діаметръ круга (въ такомъ видѣ, напримѣръ, часто наблюдается движеніе спутниковъ Юпитера по орбитамъ, видимымъ подъ острымъ угломъ), или, какъ движеніе ползуна, передаваемое отъ пальца равномѣрно вращающагося мотыля посредствомъ безконечно длинной тяги. И, какъ увидимъ дальше, есть такой родъ движенія, въ которомъ находится тѣло, когда сила, дѣйствующая на него, пропорціональна разстоянію этого тѣла отъ положенія равновѣсія; таково, напримѣръ, движеніе вверхъ и внизъ какой либо массы, подвѣшенной

къ пружинѣ, или движеніе часового маятника, когда колебанія его малы. Это есть самый простой видъ колебательныхъ движеній тѣлъ.

Многія пары величинъ связаны такимъ закономъ синусовъ, какъ въ данномъ случаѣ пространство и время, и мы изучаемъ простое гармоническое движеніе, какъ я думаю, не столько ради него самого, сколько потому, что оно аналогично многимъ другимъ явленіямъ. Теперь постараемся запомнить, хотя это еще не доказано, что если

$$y = a \sin (bx + c), \text{ то } \frac{dy}{dx} = ab \cos (bx + c)$$

и $$\int y \,.\, dx = -\frac{a}{b} \cos (bx + c).$$

101. Положимъ намъ нужно найти производную

$$y = \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

принимая въ предыдущей формулѣ $c = 0$, $b = 1$ и $a = 1$.

Какъ и раньше, пусть x возрастетъ до $x + \delta x$, тогда получимъ

$$y + \delta y = \sin (x + \delta x) \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

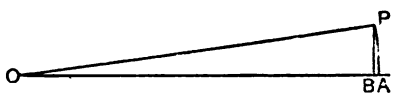
Вычитая (1) изъ (2), мы найдемъ

$$\delta y = \sin (x + \delta x) - \sin x,$$

или $$2 \cos (x + {}^1/_2\delta x) \sin {}^1/_2\delta x) \text{ (см. п. 3.)}$$

Отсюда $$\frac{\delta y}{\delta x} = \cos (x + {}^1/_2\delta x) \frac{\sin {}^1/_2\delta x}{{}^1/_2\delta x} \ldots\ldots\ldots (3).$$

Начертивъ малый уголъ α и вспомнивъ, что представляетъ собой $\sin \alpha$ и α, легко найти значеніе $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при α убывающемъ до безконечности. Такъ, пусть на чертежѣ POA означаетъ уголъ. Дуга PA, раздѣленная на OP, даетъ α величину угла въ радіанахъ. Перпендикуляръ же PB, дѣленный на OP даетъ синусъ угла. Отсюда $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{PB}{PA}$ и очевидно,



Черт. 64.

что величина этого отношенія будетъ тѣмъ ближе къ единицѣ, чѣмъ будетъ меньше уголъ α. **Итакъ мы можемъ съ тѣмъ большей вѣроятностью принимать равными 1 отношенія α, $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ одинъ къ другому, чѣмъ меньше уголъ α.** Если въ предыдущемъ выраженіи мы будемъ разсматривать $^1/_2\delta x$ вмѣсто α, то въ предѣлѣ получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \text{ если } y = \sin x$$

и отсюда $$\int \cos x \,.\, dx = \sin x \, ^*.$$

102. Но недостаточно доказать подобную вещь,—нужно съ ней хорошо освоиться.

Для этого студентъ долженъ взять справочную книжку съ математическими таблицами и провѣрить это на дѣлѣ.

Несчастье въ томъ, что эти книжки составлены однѣ для совершенно незнающихъ людей, другія для очень ученыхъ, и потому въ нихъ не всегда найдешь переводъ радіусовъ въ градусы и обратно. Не слѣдуетъ забывать, что

---

* Доказательство болѣе общаго случая совершенно въ томъ же родѣ. Тогда будетъ

$$y = a \sin (bx + c)$$
$$y + \delta y = a \sin [b(x + \delta x) + c]$$
$$\delta y = 2a \cos (bx + c + {}^1/_2 b.\delta x) \sin ({}^1/_2 b.\delta x). \text{ См. п. 3.}$$
$$\frac{\delta y}{\delta x} = ab.\cos (bx + c + {}^1/_2 b.\delta x) \frac{\sin ({}^1/_2 b.\delta x)}{{}^1/_2 b.\delta x}.$$

Станемъ уменьшать δx, тогда получимъ

$$\frac{dy}{dx} = ab \cos (bx + c) \text{ и отсюда } \int a \cos (bx + c) \,.\, dx = \frac{a}{b} \sin (bx + c).$$

Теперь возьмемъ другой случай;

Если $y = a \cos (bx + e)$—это то же самое, что

$$y = a \sin \left(bx + e + \frac{\pi}{2}\right) = a \sin (bx + c).$$

Отсюда $$\frac{dy}{dx} = ab \cos (bx + c) =$$
$$= ab \cos \left(bx + e + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = - ab \sin (bx + c).$$

Отсюда $$\int a \sin (bx + c).dx = -\frac{a}{b} \cos (bx + c)$$

въ $\sin x$ и $\cos x$ мы выражаемъ x въ радіанахъ. Разсмотримъ хоть слѣдующую маленькую выдержку изъ таблицъ, взятую на удачу.

Уголъ въ градусахъ.	x или уголъ въ радіанахъ.	$y = \sin x$	δy	$\frac{\delta y}{\delta x}$	Среднее $\frac{\delta y}{\delta x}$
40	0.6981	0.6427876			
			0.0132714	0.7583	
41	0.7156	0.6560590			0.7547
			0.0130716	0 7512	
42	0.7330	0.6691306			

Если вспомнимъ, что $\frac{\delta y}{\delta x}$ въ каждомъ случаѣ въ дѣйствительности будетъ среднимъ значеніемъ $\frac{dy}{dx}$ для одного градуса или 0,01745 радіана, то легко поймемъ, почему оно не будетъ въ точности равно косинусу x. Пусть студентъ самъ убѣдится, насколько близко 0,7547 выражаетъ величину $\cos 41^0$.

103. Легко убѣдиться такимъ же путемъ, что, если

$$y = \cos x,\ \frac{dy}{dx} = -\sin x \text{ и } \int \sin x . dx = -\cos x.$$

Знакъ — нужно запомнить.

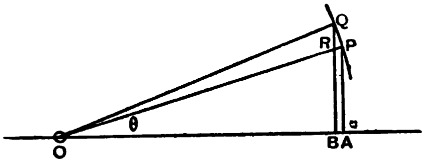
Поясняемъ примѣромъ:

Уголъ въ градусахъ.	x или уголъ въ радіанахъ.	$y = \cos x$	δy отрицательно.	$\frac{\delta y}{\delta x}$	Среднее $\frac{\delta y}{\delta x}$
20	0.3491	0.9396926			
			0.0061122	—0.3513	
21	0.3665	0.9335804			—0.3584
			0.0063965	—0.3656	
22	0.3840	0.9271839			

Замѣтимъ, что y уменьшается по мѣрѣ увеличенія x. Замѣтьте также, что $\sin 21^0$ или $\sin (0{\cdot}3665) = 0{\cdot}3584$.

104. Вотъ другое доказательство того, что производная $\sin x$ равна $\cos x$. Пусть AOP, чертежъ 65, равно θ. $AOQ = \theta + \delta\theta$. Пусть PQ — малая дуга, описанная около O, какъ центра, и $OP = OQ = 1$. PR перпендикулярна къ QP.

Тогда $AP = y = \sin\theta$, $BQ = \sin(\theta + \delta\theta) = y + \delta y$, $QP = \delta\theta$ и $RQ = \delta y$. Длина дуги PQ по мѣрѣ уменьшенія угла $\delta\theta$



Черт. 65.

все болѣе приближается къ длинѣ прямой линіи между P и Q.

Такимъ образомъ $\frac{RQ}{QP}$ или $\frac{\delta y}{\delta\theta}$ дѣлается все болѣе близкимъ къ $\cos PQR$ или $\cos\theta$.

Въ предѣлѣ $\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$, если $y = \sin\theta$.

Подобнымъ же образомъ если

$$z = \cos\theta = OA,\quad \delta z = -BA = -RP, \text{ то}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{RP}{QP} = -\sin\theta.$$

Доказательства подобнаго рода имѣютъ еще большую цѣнность, когда студентъ придумаетъ ихъ самъ. Всякій путь для лучшаго ознакомленія съ идеями имѣетъ цѣну.

Но было бы большой ошибкой со стороны автора книги давать слишкомъ много разныхъ доказательствъ. Онъ склоненъ отдавать преимущества тѣмъ доказательствамъ, которыя онъ открылъ самъ и которыя поэтому были неоцѣнимы въ его собственномъ образованіи.

105. Замѣтимъ, что если $y = A\sin ax + B\cos ax$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y \text{ и } \frac{d^4y}{dx^4} = a^4y.$$

Сравнимъ это съ тѣмъ, что, если $y = e^{ax}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2y$, $\frac{d^4y}{dx^4} = a^4y$.

Въ приложеніяхъ высшей математики къ инженерной наукѣ это сходство и различіе между двумя функціями e^{ax} и $\sin ax$ пріобрѣтаетъ важное значеніе. Замѣтимъ, что, если черезъ i обозначить $\sqrt{-1}$, т. е. $i^2=-1$, $i^4=1$, и т. д., то при $y=e^{iax}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y$ $\frac{d^4y}{dx^4}=a^4y$, то же самое, что и для функціи синуса. Сравн. п. 99.

106. *Упражненіе*. Тѣ, которые знакомы съ доказательствомъ теоремы Демоавра въ тригонометріи (доказательство легкое; вообще, доказательства всѣхъ математическихъ положеній, имѣющихъ примѣненіе къ инженерной наукѣ, просты, затруднительные случаи встрѣчаются только въ академическихъ трудахъ), знаютъ, что при всякихъ алгебраическихъ величинахъ, $\cos ax = {}^1/_2\,(e^{iax}+e^{-iax})$ и $\sin ax = \frac{1}{2i}(e^{iax}-e^{-iax})$.

Если это такъ, то предлагается доказать наши основныя положенія.

107. *Примѣръ*. Плоская **замкнутая электрическая цѣпь**, имѣющая площадь A кв. сант., можетъ вращаться съ равномѣрной угловой скоростью вокругъ оси, находящейся подъ прямымъ угломъ къ направленію однороднаго магнитнаго поля H. Предполагается, что H выражено въ $C.G.S.$ единицахъ. Пусть θ означаетъ уголъ, пройденный при вращеніи отъ того положенія, при которомъ въ цѣпи проявляется наибольшая индукція HA; очевидно, что въ положеніи θ индукція въ цѣпи будетъ $HA\cos\theta$. Если уголъ θ пройденъ въ теченіи времени t съ угловой скоростью q радіановъ въ секунду, то $\theta=qt$. Такимъ образомъ индукція $I=AH\cos qt$. Величина ея приращенія въ секунду будетъ $-AqH\sin qt$, и это будетъ выражать величину электровозбудительной силы въ одномъ оборотѣ проволоки. Если имѣется n оборотовъ, то полная электровозбудительная сила будетъ $-nAqH\sin qt$ въ $C.G.S.$ единицахъ; если мы хотимъ перейти къ торговымъ единицамъ, то **вольтажъ выразится**

$$-nAqH\,10^{-8}\sin qt \text{ вольтъ},$$

и представитъ собой простую гармоническую функцію вре-

мени. Замѣтимъ, что терминъ «вольтажъ» употребляется для выраженія линейнаго интеграла электровозбудительной силы независимо отъ того, выражена ли она въ вольтахъ или въ другихъ единицахъ.

Примѣръ. **Обмотка альтернатора** проходитъ черезъ поле, которое производитъ въ ней индукцію

$$I = A_0 + A_1 \sin(\theta + \varepsilon_1) + Ar \sin(r\theta + \varepsilon r),$$

гдѣ θ есть уголъ, на который повернулась обмотка.

Если q есть относительная угловая скорость обмотки и поля, $\theta = qt$. Если обмотка содержитъ въ себѣ n оборотовъ проволоки, тогда вольтажъ будетъ $n\frac{dI}{dt}$ или

$$nq \left\{ A_1 \cos(qt + \varepsilon_1) + Ar\, r \cos(rqt + \varepsilon r) \right\}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что **измѣненія въ напряженіи поля**, частота (frequency) которыхъ выражается числомъ r, во столько же разъ **увеличиваютъ отклоненія** въ электровозбудительной силѣ.

108. Положимъ, что при **подвѣшиваніи на двойной нити (бифиляръ)** W означаетъ вѣсъ подвѣшенной массы, a и b разстоянія между нитями внизу и вверху, h вертикальная длина нитей; если разность вертикальныхъ слагающихъ натяженія нитей равна nW, а θ — уголъ отклоненія отъ азимута, то моментъ сопротивленія дальнѣйшему вращенію будетъ:

$$\tfrac{1}{4}(1 - n^2)\, W \frac{ab}{h} \sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Замѣтимъ, что, для того чтобы сдѣлать приборъ болѣе чувствительнымъ, нужно только передать больше нагрузки на одну нить сравнительно съ другой.

Моментъ сопротивленія вращенію тѣла, отклоненнаго отъ состоянія равновѣсія на уголъ θ, часто бываетъ пропорціоналенъ $\sin\theta$. Такъ, если W есть вѣсъ сложнаго **маятника** и OG — разстояніе его центра тяжести отъ точки привѣса, то $W . OG \sin\theta$ представитъ моментъ, который будетъ заставлять маятникъ вернуться въ положеніе равновѣсія. Если M будетъ моментъ **магнита**, отклоненнаго на

уголъ θ отъ положенія равновѣсія, въ полѣ, напряженіе котораго H, то $HM \sin \theta$ будетъ моментъ, заставляющій его вернуться въ положеніе равновѣсія. Тѣло, приводимое въ движеніе крученіемъ проволоки или стерженька, будетъ находиться подъ вліяніемъ момента вращенія, пропорціональнаго θ. Когда угловыя отклоненія малы, мы часто въ этомъ случаѣ принимаемъ $\sin \theta$ равнымъ θ. Иногда тѣло можетъ находиться одновременно подъ вліяніемъ нѣсколькихъ силъ. Такъ игла квадрантнаго электрометра подвѣшена на двухъ нитяхъ, но въ этомъ случаѣ присоединяется еще нѣкоторое электрическое сопротивленіе, которое является благодаря плохой идеѣ и конструкціи, и которое вѣроятно можетъ быть представлено выраженіемъ подобнымъ $a\theta + b\theta^2$.

Если нити жестки, ихъ собственная жесткость вноситъ поправку пропорціональную θ, которую мы не включили въ (1).

Иногда вводятъ нѣкоторое сопротивленіе, соединяя маленькую магнитную иглу съ иглой электрометра, что обусловливаетъ прибавку къ уравненію члена пропорціональнаго $\sin \theta$.

Въ нѣкоторыхъ инструментахъ, гдѣ движущееся тѣло сдѣлано изъ мягкаго желѣза, моментъ почти пропорціоналенъ $\sin 2\theta$.

Если моментъ сопротивленія есть M и тѣло повернулось на уголъ $\delta\theta$, то совершенная работа равна $M.\delta\theta$. Отсюда, работа, совершенная при вращеніи тѣла изъ положенія θ_1 въ положеніе θ_2, гдѣ θ_2 болѣе θ_1, будетъ $\int_{\theta_1}^{\theta_2} M.d\theta$.

Примѣръ. Моментъ сопротивленія вращенію тѣла равенъ $a \sin \theta$, гдѣ θ есть уголъ поворота, какая работа совершена при вращеніи тѣла отъ θ_1 до θ_2? Отвѣтъ $\int_{\theta_1}^{\theta_2} a \sin \theta . d\theta = - a (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = a (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$.

Примѣръ. Сопротивленіе тѣла вращенію отчасти состоитъ изъ постояннаго момента вращенія a отъ тренія, отчасти опредѣляется выраженіемъ $b\theta + c\theta^2$, и частью выраженіемъ $e \sin \theta$; какая работа будетъ совершена при вращеніи тѣла отъ $\theta = 0$ до какого либо угла?

M — моментъ вращенія $= a + b\theta + c\theta^2 + e \sin\theta = f(\theta)$.
V — работа $= a\theta + {}^1/_2 b\theta^2 + {}^1/_3 c\theta^3 + e(1 - \cos\theta) = F(\theta)$.

Эта величина называется **потенціальной энергіей тѣла** въ положеніи θ.

Кинетическая энергія вращающагося тѣла есть ${}^1/_2 I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, гдѣ I есть моментъ инерціи тѣла относительно его оси. Когда тѣло отклонилось на уголъ θ, его полная энергія E равна ${}^1/_2 I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + F(\theta)$.

Если полная энергія остается постоянною, и тѣло, находящееся въ положеніи θ, движется по направленію возрастанія θ, при чемъ на него не дѣйствуетъ никакой силы кромѣ его момента сопротивленія, то оно будетъ продолжать двигаться до положенія θ_1, при которомъ

$$ {}^1/_2 I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + F(\theta) = F(\theta_1). $$

Такимъ образомъ, если видъ $F(\theta)$ извѣстенъ, θ_1 можетъ быть вычисленъ, если мы знаемъ величину кинетической энергіи при θ.

Пусть $M = e \sin\theta$, такъ что $F(\theta) = e(1 - \cos\theta)$, тогда

$$ {}^1/_2 I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + e(1 - \cos\theta) = e(1 - \cos\theta_1), $$

откуда **можетъ быть опредѣлено** θ_1 — **крайнее положеніе тѣла.**

Упражненіе. Показать, что, если сопротивляющійся опрокидыванію моментъ судна пропорціоналенъ $\sin 4\theta$, гдѣ θ есть уголъ крена, и если вѣтеръ, моментъ котораго въ состояніи удерживать судно въ равновѣсіи при постоянномъ углѣ наклоненія $11^2/_3{}^0$, внезапно выведетъ судно изъ состоянія покоя при $\theta = 0$ и будетъ продолжать дѣйствовать, и если мы можемъ пренебречь треніемъ. то судно накренится до $33^1/_3$ градусовъ и затѣмъ опять выпрямится. Разобрать вліяніе тренія.

Тѣло находится въ крайнемъ положеніи θ_1; **какъ велика будетъ его кинетическая энергія**, когда оно будетъ проходить чрезъ положеніе равновѣсія? Отвѣтъ $F(\theta_1)$,

Пусть $M = b\theta + c\theta^2 + e \sin\theta$.

Найти α, угловую скорость при $\theta = 0$, если крайнее отклоненіе равно 45^0. Здѣсь

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ и } F(\theta) = {}^1/_2 b\theta^2 + {}^1/_3 c\theta^3 + e(1 - \cos\theta)$$

$$ {}^1/_2 I\alpha^2 = /_2 b\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + /{}^1/_3 c\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + e\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда можемъ найти α.

Задача. Положимъ, мы желаемъ, чтобы потенціальная энергія, слѣдовала такому закону

$$V = F(\theta) = a\theta^{1/2} + b\theta^3 + c\varepsilon^m\theta + h\sin 2\theta$$

и мы хотимъ узнать, по какому закону долженъ мѣняться моментъ сопротивленія; мы сразу видимъ, что, такъ какъ

$$M = \frac{dV}{d\theta}, \text{ то}$$

$$M = {}^3/_2 a\theta\, {}^1/_2 + 3b\theta^2 + mc\varepsilon^m\theta + 2h\cos 2\theta.$$

Задача. Тѣло, находящееся въ положеніи θ_0 и двигающееся съ угловой скоростью α въ направленіи возрастанія θ, **получило внезапно импульсъ, моментъ котораго** m въ направленіи возрастающихъ θ; **какъ велико будетъ его отклоненіе?**

Моментъ количества движенія былъ $I\alpha$, теперь онъ равенъ $I\alpha + m$, и если черезъ α^1 обозначимъ новую угловую скорость, то $\alpha^1 = \alpha + \frac{m}{I}$.

Такимъ образомъ въ положеніи θ_0 кинетическая энергія тѣла будетъ ${}^1/_2 I\left(\alpha + \frac{m}{I}\right)^2$, а потенціальная энергія $F(\theta_0)$; приравнивая сумму этихъ количествъ къ $F(\theta_1)$ можемъ получить θ_1.

Студентъ легко убѣдится, что общее уравненіе движенія тѣла, приведеннаго въ движеніе вокругъ нѣкоторой оси, будетъ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{I} f(\theta) = 0;$$

$f(\theta)$ можетъ заключать въ себѣ членъ, выражающій треніе.

109. Каждое изъ слѣдующихъ упражненій должно быть тщательно разработано студентами; выводы изъ нихъ имѣютъ важное практическое значеніе, въ особенности **для инженеровъ электриковъ.** При разработкѣ ихъ необходимо помнить тригонометрическія соотношенія

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$
$$2\sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi),$$
$$2\cos\theta\cos\varphi = \cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi),$$
$$2\sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi).$$

Такія упражненія цѣнны не только потому, что они уясняютъ способы расчетовъ; они кромѣ того даютъ навыкъ въ обращеніи съ тригонометрическими выраженіями, имѣющими огромное значеніе для инженера.

Среднее значеніе для $f(x)$, въ предѣлахъ отъ $x = x$ до $x = x_2$, равно очевидно площади $\int_{x_1}^{x_2} f(x).dx$, дѣленной на $x_2 - x_1$.

Каждое изъ упражненій съ 6 по 20, а также 23, студенты должны пояснить графически.

Хорошіе чертежи, сдѣланные отъ руки, кривыхъ, ординаты которыхъ перемножаются, и тѣхъ кривыхъ, которыя будутъ результатомъ перемноженія, дадутъ достаточно наглядный результатъ.

1. $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$.

2. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$.

3. $\int \sin ax.\cos bx.dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}$.

4. $\int \sin ax.\sin bx.dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$.

5. $\int \cos ax.\cos bx.dx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}$.

6. Площадь синусоиды для цѣлаго періода равна 0.

$$\int_0^{2\pi} \sin x.dx = -\Big[\cos x\Big]_0^{2\pi} = -(1-1) = 0.$$

7. Найти площадь положительной части синусоиды.

$$\int_0^\pi \sin x \, . dx = -\Big[\cos x\Big]_0^\pi = -(-1-1) = 2.$$

Такъ какъ длина основанія этой части кривой равна π, то средняя высота ея будетъ $\frac{2}{\pi}$. Наибольшая высота или амплитуда равна 1.

8. Площадь $y = a + b \sin x$ отъ 0 до 2π будетъ $2\pi a$, а средняя высота кривой a.

9. Найти среднее значеніе $\sin^2 x$ отъ $x = 0$ до $x = 2\pi$.

Такъ какъ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^2 x = {}^1/_2 (1 - \cos 2x)$.

Интегралъ этого выраженія будетъ ${}^1/_2 x - {}^1/_4 \sin 2x$; взявъ предѣлы, получимъ площадь $({}^1/_2\, 2\pi - {}^1/_4 \sin 4\pi - 0 + {}^1/_4 \sin 0) = \pi$. Средняя высота равна площади дѣленной на 2π, слѣдовательно она равна ${}^1/_2$.

10. Среднее значеніе $\cos^2 x$ отъ $x = 0$ до $x = 2\pi$ равна ${}^1/_2$.

Въ слѣдующихъ упражненіяхъ подъ s и r подразумѣваются цѣлыя и неравныя между собою числа:

11. Среднее значеніе $a \sin^2 (sqt + e)$ отъ $t = 0$ до $t = T$ равна $\frac{a}{2}$, если s цѣлое число и $q = \frac{2\pi}{T}$, гдѣ T есть продолжительность одного періода.

12. Среднее значеніе $a \cos^2 (sqt + e)$ отъ $t = 0$ до $t = T$ равно $\frac{a}{2}$.

13. $\int_0^T \cos sqt \, . \sin sqt \, . dt = 0.$

14. $\int_0^T \sin sqt \, . \sin rqt \, . dt = 0.$

15. $\int_0^T \cos sqt \, . \cos rqt \, . dt = 0.$

16. $\int_0^T \sin sqt \, . \cos rqt \, . dt = 0.$

17. Среднее значеніе $\sin^2 sqt$ отъ 0 до ${}^1/_2 T$ равно ${}^1/_2$.

18. Среднее значеніе $\cos^2 sqt$ отъ 0 до ${}^1/_2 T$ равно ${}^1/_2$.

19. $\int_0^{1/2 T} \sin sqt . \sin rqt . dt = 0.$

20. $\int_0^{1/2 T} \cos sqt . \cos rqt . dt = 0.$

21. Найти $\int \sin x . \sin (x + e) . dx.$

Здѣсь $\sin (x + e) = \sin x . \cos e + \cos x . \sin e.$

Такимъ образомъ намъ нужно проинтегрировать $\sin^2 x . \cos e + \sin x . \cos x . \sin e,$

$$\int \sin^2 x . dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4},$$

$$\int \sin x . \cos x . dx = {}^1/_2 \int \sin 2x . dx = - {}^1/_4 \cos 2x,$$

слѣдовательно нашъ интегралъ равенъ

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) \cos e - {}^1/_4 \cos 2x . \sin e.$$

22. Доказать, что $\int \sin qt . \sin (qt + e) . dt =$

$$= \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2qt}{4q}\right) \cos e - \frac{1}{4q} \cos 2qt . \sin e.$$

23. Доказать, что среднее значеніе $\sin qt . \sin (qt \pm e)$ или $\sin (qt + a) \sin (qt + a \pm e)$ для цѣлаго періода T $\left(\text{если } q = \frac{2\pi}{T}\right)$ равно ${}^1/_2 \cos e$.

Это станетъ яснымъ, если мы замѣтимъ, что (полагая $qt + a = \varphi$),

$$\sin \varphi . \sin (\varphi \pm e) = \sin \varphi \ (\sin \varphi \cos e \pm \cos \varphi . \sin e)$$
$$= \sin^2 \varphi . \cos e \pm \sin \varphi . \cos \varphi . \sin e.$$

Но среднее значеніе $\sin^2 \varphi$ для цѣлаго періода равно ${}^1/_2$, а среднее значеніе $\sin \varphi . \cos \varphi$ равно 0.

Полагая въ предыдущемъ $a = \frac{\pi}{2}$, мы видимъ, что среднее значеніе $\cos qt . \cos (qt \pm e)$ равно ${}^1/_2 \cos e$, т. е. **среднее значеніе для цѣлаго періода произведенія двухъ синусоидальныхъ функцій времени одинакаго періода, каждая съ ампли-**

тудой 1, равно половинѣ косинуса угла, выражающаго запаздываніе фазы одной функціи сравнительно съ другой.

24. Согласно п. 106 имѣемъ

$$\cos a\theta = {}^1/_2 (e^{ia\theta} + e^{-ia\theta}),$$

$$\sin a\theta = \frac{1}{2i}(e^{ia\theta} - e^{-ia\theta}).$$

тогда получимъ

$$e^{ia\theta} = \cos a\theta + i \sin a\theta,$$

$$e^{-ia\theta} = \cos a\theta - i \sin a\theta,$$

отсюда найдемъ, что $\int e^{b\theta} \cos a\theta . d\theta,$

равенъ ${}^1/_2 \int (e^{(b+ai)\theta} + e^{(b-ai)\theta}) \, d\theta$

$$= {}^1/_2 \left\{ \frac{1}{b+ai} e^{(b+ai)\theta} + \frac{1}{b-ai} e^{(b-ai)\theta} \right\}$$

$$= {}^1/_2 e^{b\theta} \left\{ \frac{1}{b+ai} e^{ai\theta} + \frac{1}{b-ai} e^{-ai\theta} \right\},$$

и, подставляя сюда вышеуказанныя величины, получимъ

$$\int e^{b\theta} \cos a\theta . d\theta = \frac{1}{a^2+b^2} e^{b\theta} (b \cos a\theta + a \sin a\theta) \ldots . (1).$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$\int e^{b\theta} \sin a\theta . d\theta = \frac{1}{a^2+b^2} e^{b\theta} (b \sin a\theta - a \cos a\theta) \ldots . (2).$$

110. Нѣкоторыя замѣчанія, касающіяся гармоническихъ функцій. Въ слѣдующихъ замѣчаніяхъ студентъ найдетъ нѣкоторый матеріалъ для повторенія тѣхъ положеній, которыя уже были объяснены.

111. Функція $x = a \sin qt$ аналогична съ прямолинейнымъ движеніемъ ползуна, связаннаго безконечно длинной тягой съ **мотылемъ длиной** a (вращающимся съ **угловой скоростью** q радіановъ въ секунду), x есть разстояніе ползуна отъ середины его пути въ моментъ t.

Въ моментъ $t = 0$, $x = 0$ и мотыль находится подъ пря-

мымъ угломъ къ положенію на мертвой точкѣ. $q = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, если T есть **продолжительность періода**, а f есть **частота** или число оборотовъ мотыля въ секунду, принимая 1 секунду за единицу времени.

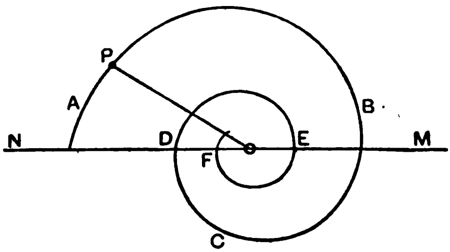
112. Функція, $x = a \sin(qt + \varepsilon)$ представляетъ то же самое, за исключеніемъ того, что мотыль въ этомъ случаѣ находится на ε **радіановъ** (радіанъ равенъ 57,2957 градусовъ) **впереди** сравнительно съ первымъ случаемъ; иначе говоря, въ моментъ $t = 0$ ползунъ уже отошелъ на разстояніе $a \sin \varepsilon$ отъ своего средняго положенія *.

* Въ данномъ случаѣ студенту можно опять указать на п. 10, при чемъ предполагается, что онъ уже вычертилъ кривую, представляющую уравненіе

$$x = a\varepsilon^{-bt} \sin(qt + \varepsilon) \ldots \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Вообразимъ себѣ, что мотыль, вращающійся равномѣрно съ угловой скоростью q, приводитъ въ движеніе ползунъ, но кромѣ того представимъ себѣ, что мотыль все укорачивается, и его длина въ нѣкоторый моментъ равна $a\varepsilon^{-bt}$.

Другой путь для выясненія этого движенія будетъ таковъ; представимъ себѣ, что нѣкоторая точка P движется съ постоянной *угловой* скоростью вокругъ O, совершая путь $APBCDEF$ по ло-



Черт. 66.

гариѳмической спирали; искомое движеніе есть движеніе проекціи точки P на прямую MON, а то, что мы назвали логариѳмическимъ приращеніемъ есть $\pi \cot g\, \alpha$, если α есть уголъ спирали, т. е. постоянный острый уголъ, образуемый въ любой точкѣ линіей OP съ кривой, $\pi \cot g\, \alpha = aT/2$ и $q = 2\pi/T$, слѣдовательно $\cot g\, \alpha = a/q$. Если черт. 66 разсматривать совмѣстно съ черт. 67, при чемъ NM остается вертикальной, и P есть положеніе точки въ моментъ O, тогда $\varepsilon =$ углу $NOP - \pi/2$.

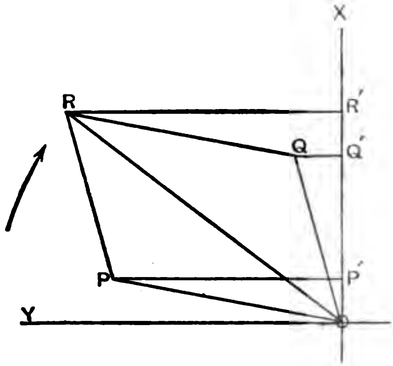
113. Функція $x = a \sin(qt + \varepsilon) + a' \sin(qt + \varepsilon')$ равносильна функціи $X = A \sin(qt + E)$; иначе говоря **равнодѣйствующая двухъ движеній мотыля можетъ быть изображена движеніемъ одного мотыля особой длины и съ особымъ угломъ предваренія.** Нанесемъ на чертежъ первые два положенія, при $t = 0$, т. е.

$$YOP = \varepsilon \text{ и } OP = a,$$
$$YOQ = \varepsilon' \text{ и } OQ = a'.$$

Дополнимъ параллелограмъ $OPRQ$ и проведемъ діагональ OR, тогда простой мотыль $OR = A$, съ угломъ предваренія $YOR = E$, сообщитъ ползуну сумму тѣхъ движеній, которыя отдѣльно передаются ему мотылями OP и OQ. Геометрическое доказательство этого очень просто.

Положимъ, что ползунъ движется по вертикали.

Проведемъ OQ, OR и OP соотвѣтственно ихъ относительному положенію и спроектируемъ P, R и Q на OX. Мотыль OP заставитъ ползунъ въ данный моментъ подвинуться на разстояніе OP' отъ его средняго положенія, мотыль OQ отодвинетъ ползунъ на разстояніе OQ' отъ средины его пути, мотыль же OR въ тотъ же моментъ отодвинетъ ползунъ на разстояніе OR'; ясно, что OR' въ любомъ положеніи равно алгебраической суммѣ OP' и OQ'.



Черт. 67.

Мы можемъ выразить это такъ: «простое гармоническое движеніе, которое произведетъ мотыль OP, + п.г.д., которое произведетъ мотыль OQ, равно п.г.д. производимому мотылемъ OR». Подобнымъ же образомъ п.г.д., производимое мотылемъ OR —п. г. д., производимое мотылемъ OP, равно п.г.д., производимому мотылемъ OQ». Иногда говорятъ такъ: мотыль OR есть сумма двухъ мотылей OP и OQ. Такимъ

образомъ мотыли могутъ быть складываемы и вычитаемы, какъ секторы.

114. Эти положенія имѣютъ большую важность, когда приходится имѣть дѣло съ движеніями золотниковъ, или съ другими подобными же механизмами. Для электриковъ же они имѣютъ столь важное значеніе, что нѣкоторые практики прямо говорятъ «пусть моментъ OP представляетъ токъ». Они подъ этимъ подразумѣваютъ «такой токъ, сила котораго измѣняется въ зависимости отъ времени согласно закону $C = a \sin(qt + \varepsilon)$, и аналогична съ перемѣщеніемъ ползуна, приводимаго въ вертикальное движеніе мотылемъ OP, длина котораго a, угловая скорость q и OP его положеніе въ моментъ $t = 0$» †.

115. Такъ какъ функція $x = a \cos qt$ есть то же самое что $a \sin\left(qt + \frac{\pi}{2}\right)$, то она слѣдовательно выражаетъ движеніе, передающееся отъ мотыля длиной a съ угломъ предваренія ! 0°.

Въ нѣкоторый моментъ t **скорость** ползуна, движеніе котораго выражается уравненіемъ.

$$x = a \sin(qt + \varepsilon),$$

будетъ

$$v = aq \cos(qt + \varepsilon) = \frac{dx}{dt} \text{ или } x'$$

$$= aq \sin\left(qt + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right),$$

иначе говоря, она можетъ быть представлена дѣйствительнымъ положеніемъ въ нѣкоторый моментъ ползуна, приводимаго въ движеніе мотылемъ, длина котораго aq, при чемъ этотъ новый мотыль на 90° впереди перваго. **Ускореніе, или** $\frac{d^2x}{dt^2}$, или $\frac{dv}{dt}$, или еще иначе v^1, можетъ быть представлено въ нѣкоторый моментъ мотылемъ, длиной aq^2, насаженнымъ на 90° впереди v мотыля или на 180° впереди x — мотыля, такъ какъ ускореніе

$$= - aq^2 \sin(qt + \varepsilon)$$
$$= aq^2 \sin(qt + \varepsilon + \pi).$$

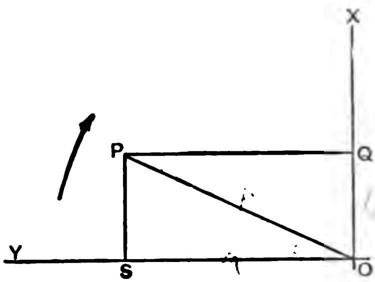
Характерное свойство простого гармоническаго движенія заключается въ томъ, что численная величина ускоренія равна q^2 или $4\pi^2 f^2$ разъ взятому перемѣщенію, если f означаетъ число періодовъ въ секунду.

Если какое либо явленіе слѣдуетъ закону $a \sin (qt + \varepsilon)$, то оно аналогично движенію ползуна и мы часто говоримъ, что оно выражается мотылемъ OP; **величина его приращенія въ единицу времени** аналогична скорости ползуна, и мы говоримъ, что она выражается мотылемъ длиной aq, повернутымъ на 90^0 впереди перваго. И, дѣйствительно, въ простой гармонической функціи дифференцированіе увеличиваетъ ее въ q разъ и увеличиваетъ уголъ предваренія на величину прямого угла.

116. Иногда вмѣсто того, чтобы сказать, что функція равна $\mathbf{A \sin (qt + \varepsilon)}$ мы говоримъ, что она равна $\mathbf{a \sin qt +}$ $\mathbf{b \cos qt}$.

Очевидно, что это одно и то же, если $a^2 + b^2 = A^2$ и если $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{b}{a}$.

Это легко доказать и тригонометрически и графически по черт. 68. Пусть $OS = a$, $OQ = b$. Мотыль OP есть сумма OS и OQ и $\operatorname{tang} \varepsilon$ или $\operatorname{tang} YOP = \frac{b}{a}$.



Черт. 68.

117. Мы уже указывали въ п. 100 на удобный графическій способъ вычерчиванія кривой

$$x = a \sin (qt + \varepsilon)$$

гдѣ x и t суть ордината и абсцисса.

Можно многое себѣ уяснить, если изобразить графически два уравненія для одинаковаго періода,

$$x = a \sin (qt + \varepsilon) \text{ и } x = a' \sin (qt + \varepsilon')$$

и сложить вмѣстѣ ихъ ординаты. Это разъяснитъ п. 113.

118. Если вольтажъ въ **электрической цѣпи** равенъ V вольтъ, токъ C амперъ, сопротивленіе R омовъ и самоиндукція L генри, то, если t время выражено въ секундахъ,

$$V = RC + L\frac{dC}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Если $C = C_0 \sin qt$,

$$\frac{dC}{dt} = C_0 q \cos qt,$$

такъ, что $V = RC_0 \sin qt + LC_0 q . \cos qt$,
а по п. 116 это равно

$$V = C_0 \sqrt{R^2 + L^2q^2} \sin (qt + \varepsilon) \ldots\ldots\ldots (2)$$

$\sqrt{R^2 + L^2q^2}$ называется кажущимся сопротивленіемъ цѣпи (impedance);

$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{Lq}{R} = \frac{2\pi Lf}{R}$, если f число періодовъ въ секунду;

ε есть *запаздываніе фазы* тока.

Отсюда, если $\qquad V = V_0 \sin qt \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

то $$C = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2q^2}} \sin\left(qt - \operatorname{arctg}\frac{Lq}{R}\right)^{\dagger} \ldots\ldots (4).$$

Замѣтимъ, что если V дано такимъ, какъ въ (3), полное выраженіе для C будетъ заключать въ себѣ **исчезающій членъ,** выражающій начальныя условія см. п.п. 98, 147, но въ (4) предполагается, что V, какъ простая гармоническая функція, уже установилось. На практикѣ въ электрическихъ установкахъ достаточно бываетъ очень малой доли секунды, чтобы этотъ членъ совершенно исчезъ.

119. Мы можемъ выразить характерное свойство простого гармоническаго движенія, написавъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

(сравни п. 26 и 108) и если дано (1), то мы знаемъ, что отсюда слѣдуетъ:

$$x = a \sin qt + b \cos bt \text{ или } x = A \sin (qt + \varepsilon) \ldots (2).$$

гдѣ A и ε, или a и b суть нѣкоторыя произвольныя постоянныя.

Примѣръ. **Тѣло**, вѣсъ котораго W фунтовъ, **находится въ простомъ гармоническомъ движеніи** съ амплитудой a футъ, (т. е. полный ходъ равенъ $2a$ футамъ); число періодовъ въ секунду f,—**какія силы** производятъ такое движеніе?

Если x фут. будетъ отклоненіе тѣла отъ его средняго положенія въ нѣкоторый моментъ, то движеніе его выразится такъ:

$$x = a \sin bt \text{ или } x = a \sin 2\pi f . t,$$

и численная величина его ускоренія въ нѣкоторый моментъ будетъ $4\pi^2 f^2 x$, а сила, направляющая тѣло къ его среднему положенію, выразится въ фунтахъ $4\pi^2 f^2 x\, W : 32{\cdot}2$, такъ какъ масса въ инженерныхъ единицахъ равна въ Лондонѣ вѣсу въ фунтахъ, дѣленному на 32,2, а сила равна ускоренію $\times$ массу.

120. Если шатунъ **паровой или газовой машины** достаточно длиненъ, и если мы назовемъ W вѣсъ поршня и поршневого стержня, то полученное выше выраженіе приблизительно представитъ силу, которая передается на крейцкопфу въ томъ случаѣ, когда обѣ стороны поршня будутъ находиться подъ атмосфернымъ давленіемъ. Замѣтимъ, что она равна 0 при $x = 0$ и пропорціональна x, получая наибольшую величину по концамъ размаха. Составьте діаграмму, показывающую величину этой силы въ каждой точкѣ хода и особенно обратите вниманіе на то, что она всегда дѣйствуетъ *по направленію* къ средней точкѣ.

Теперь, если студентъ имѣетъ для машины индикаторныя діаграммы (для обѣихъ сторонъ поршня), онъ можетъ сначала вычертить діаграмму, показывающую въ каждой точкѣ хода силу пара, дѣйствующаго на поршень, затѣмъ онъ можетъ соединить ее съ первой діаграммой, чтобы получить значеніе силы дѣйствующей на крейцкопфу. Замѣтимъ, что давленіе пара дается на квадратный дюймъ, а во второмъ случаѣ берется полная сила.

Если студентъ все это продѣлаетъ самъ, то отъ этого будетъ въ десять разъ больше пользы, чѣмъ если излагать это здѣсь.

Такъ какъ ускореніе пропорціонально квадрату числа періодовъ въ секунду, то на сотрясеніе машинъ приходится

теперь обращать гораздо болѣе серьезное вниманіе, чѣмъ прежде, когда движенія ихъ были болѣе медленны.

121. Такъ какъ мы разсматривали движеніе поршня паровой машины, предполагая, что шатунъ имѣетъ безконечно большую длину, теперь мы должны выяснить вліяніе **конечности длины шатуна.**

Въ п. 11 мы опредѣляли s разстояніе поршня отъ конца его хода въ моментъ, когда мотыль составляетъ уголъ θ съ его положеніемъ на мертвой точкѣ. Теперь, пусть x есть разстояніе поршня, считая вправо, отъ середины его хода (черт. 3), такъ что наше x равно прежнему s минусъ r, гдѣ r есть длина мотыля.

Пусть мотыль вращается равномѣрно со скоростью q радіановъ въ секунду.

Пусть опять t означаетъ время, прошедшее съ того момента, когда мотыль былъ подъ прямымъ угломъ къ своему мертвому положенію, такъ что $\theta - \frac{\pi}{2} = qt$, и мы найдемъ

$$x = -r\cos\theta + l\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}\right\}$$

или

$$x = r\sin qt + l\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\cos^2 qt}\right\}$$

Пользуясь приближеніемъ $\sqrt{1-\alpha} = 1 - {}^1/_2\,\alpha$, когда α достаточно мало, мы получимъ

$$x = r\sin qt + \frac{r^2}{2l}\cos^2 qt.$$

Но мы знаемъ, что $2\cos^2 qt - 1 = \cos 2qt$, (см. п. 109).

Отсюда
$$x = r\sin qt + \frac{r^2}{4l}\cos(2qt) - \frac{r^2}{4l} \quad \ldots\ldots (1).$$

Мы видимъ, что имѣемъ дѣло съ простымъ гармоническимъ движеніемъ и его **октавой** съ гораздо меньшей амплитудой.

Найдемъ $\frac{dx}{dt}$, также $\frac{d^2x}{dt^2}$. Эта послѣдня равна ускоренію $= -rq\sin qt - \frac{r^2q^2}{l}\cos 2qt.$

Легко видѣть, что относительное значеніе прибавочнаго члена (октавы) въ выраженіи ускоренія въ четыре раза болѣе, чѣмъ въ выраженіи движенія. Мы можемъ, если угодно, опять подставить θ вмѣсто $qt+\frac{\pi}{2}$ и получимъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=rq^2\cos\theta+\frac{r^2q^2}{l}\cos 2\theta.$$

При $\theta=0$, ускореніе равно $rq^2+\frac{r^2\theta^2}{l}$.

При $\theta=90^0$ ускореніе равно $-\frac{r^2q^2}{l}$.

При $\theta=180^0$, ускореніе равно $-rq^2+\frac{r^2q^2}{l}$,

(q равно $2\pi f$, гдѣ f есть число періодовъ мотыля въ секунду).

Если нанести на бумагу три точки, показывающія перемѣщеніе x и ускореніе въ эти моменты, то не трудно, вычертивъ кривую по тремъ точкамъ, получить достаточно вѣрное понятіе о цѣлой діаграммѣ. Можетъ быть не лишнимъ будетъ замѣтить, что въ нѣкоторой точкѣ, лежащей близъ средины, когда уголъ OPQ равенъ $90°$, такъ какъ P движется равномѣрно, и величина относительнаго приращенія угла Q равна нулю, въ этотъ моментъ ускореніе точки Q равно нулю. Это положеніе Q легко найдется, разъ задана конструкція.

Самое важное, что нужно помнить—это, во первыхъ, что ускоренія, а слѣдовательно, и движущія силы увеличиваются въ четыре раза, когда число періодовъ удваивается; въ девять разъ, когда оно утраивается; во вторыхъ, что относительное значеніе октавы сильно возрастаетъ въ ускореніи.

122. Возьмемъ особую форму движенія, **движенія кулисъ или радіальныхъ парораспредѣлительныхъ механизмовъ** и покажемъ, что движеніе золотника всегда очень близко (если t — время, прошедшее отъ начала хода поршня или qt — уголъ поворота мотыля отъ мертвой точки) къ

$$x=a_1\sin(qt+\varepsilon_1)+a_2\sin(2qt+\varepsilon_2).\;.\;.\;.\;.\;.(1).$$

(Есть очень легкій способъ получить значеніе a_1 и a_2 при изслѣдованіи механизма). Если пренебречь «обертономъ», то a_1 есть половина хода золотника, а ε_1 — уголъ предваренія.

Въ огромномъ большинствѣ радіальныхъ парораспредѣлительныхъ механизмовъ мы имѣемъ $\varepsilon_2 = 90^0$.

Наилучшій методъ изученія вліянія октавы или обертона, состоитъ въ вычерчиваніи на бумагѣ кривой для каждаго изъ членовъ (1) по методу, показанному на черт. 63, и затѣмъ складываніи ординатъ вмѣстѣ. Если мы вычтемъ изъ x величину внѣшней перекрыши L, то легко опредѣлимъ точку, въ которой происходитъ отсѣчка, а также узнаемъ, насколько ранѣе и скорѣе будетъ происходить отсѣчка благодаря этой октавѣ въ движеніи золотника.

Напримѣръ возьмемъ

$$a_2 = 1 \quad \varepsilon_1 = 40^0, \quad a_2 = 0{,}2, \quad \varepsilon_2 = 90^0.$$

Инженеръ практикъ легко замѣтитъ, что, хотя для одного конца цилиндра октава полезна; зато она вредна для другого конца, такъ что она не должна быть слишкомъ велика. Мы можемъ пользоваться ею для того, чтобы получить большій впускъ при ходѣ поршня вверхъ въ новѣйшихъ вертикальныхъ машинахъ; можемъ заставить ее исправлять неравномѣрность, происходящую отъ конечности длины шатуна.

Кулисы и шатуны никогда не даютъ обертона съ тройнымъ числомъ періодовъ.

Отношеніе числа періодовъ всегда равно 2:1.

Въ механизмѣ *Ф.* Брамвилля благодаря зубчатой передачѣ движеніе золотника выражается такъ:

$$x = a_1 \sin (qt + \varepsilon_1) + a_2 \sin (3qt + \varepsilon_2). \ . \ . \ . (2).$$

Вычертимъ кривую, показывающую это движеніе, принявъ $a_1 = 1{\cdot}15$ дюйм., $\varepsilon_1 = 47^0$, $a_2 = 0.435$, $\varepsilon_2 = 62^0$.

Если внѣшняя перекрыша равна 1 дюйму, а внутренней нѣтъ, то мы можемъ найти, при какихъ положеніяхъ главнаго мотыля происходитъ отсѣчка, выпускъ, расширеніе и впускъ пара. Показать, что этотъ механизмъ и всякій другой, дающій обертонъ съ нечетнымъ множителемъ числа

основныхъ періодовъ, дѣйствуетъ одинаково на обоихъ концахъ цилиндра.

123. Если $x = a_1 \cos(q_1 t + \varepsilon_1) + a_2 \cos(q_2 t + \varepsilon_2)$...(3),

гдѣ $$q_1 = 2\pi f_1 \text{ и } q_2 = 2\pi f_2,$$

то числа періодовъ будтъ различны; такое движеніе не можетъ быть приведено къ простому гармоническому. Положимъ a_1 — большее.

Самый лучшій методъ для изслѣдованія—графическій. Мы имѣемъ два мотыля, длины a_1 и a_2, вращающихся съ различными угловыми скоростями, такъ, что въ результатѣ получается такое движеніе, какъ будто одинъ мотыль A вращается съ средней угловой скоростью, но длина его мѣняется между предѣлами $a_1 + a_2$ и $a_1 - a_2$; при чемъ его положеніе всегда ближе къ положенію a_1, чѣмъ a_2; дѣйствительно, онъ какъ бы колеблется около положенія a_1. Если q_1 очень близко къ q_2, то мы можемъ наблюдать очень интересное явленіе, подобное **ударамъ въ музыкальныхъ тонахъ** *.

Такъ 2 тона, высоты 100 и 101 производятъ 1 ударъ въ секунду.

Аналогичные удары легко могутъ быть наблюдаемы въ лампочкѣ накаливанія, когда двѣ динамо-машины перемѣннаго тока соединены вмѣстѣ. Также и **морскія приливы**, за исключеніемъ случая длинныхъ каналовъ и бухтъ, почти всегда слѣдуютъ простому гармоническому закону; если a_1 соотвѣтствуетъ вліянію луны, а a_2 дѣйствію солнца и если $a_1 = 2{,}1\ a_2$, то высота наибольшаго прилива такъ относится къ высотѣ наибольшаго отлива, какъ 3,1 къ 1·1.

Время **наибольшихъ приливовъ** соотвѣтствуетъ **полнолуніямъ**. Дѣйствительная фаза приливовъ никогда не отличается болѣе, чѣмъ на 0,95 лунныхъ часовъ отъ лунныхъ фазъ; 0.95 лунныхъ часовъ $=$ 0,98 солнечныхъ.

---

* Аналитически. Напишемъ

$$\cos(2\pi f_2 t + \varepsilon_2) = \cos[2\pi f_1 t - 2\pi(f_1 - f_2)t + \varepsilon_2].$$

слѣдовательно $$x = r\cos(2\pi f_1 t + \theta),$$

гдѣ $$r^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2],$$

отсюда легко вычислить величину θ.

124. Періодическая функція времени есть такая, которая вмѣстѣ съ производными ея получаетъ тѣ же значенія послѣ каждаго періода T. Это T называется продолжительностью періода и обратная его величина есть f — число періодовъ.

Алгебраическое выраженіе періодической функціи будетъ

$$f(t)=f(t+nT),$$

гдѣ n есть нѣкоторое цѣлое число, положительное или отрицательное.

125. Правильность **теоремы Фурье** можетъ быть провѣрена на дѣлѣ. Она доказываетъ, что всякая періодическая функція съ періодомъ T (такъ что q равно $\frac{2\pi}{T}$ или $2\pi f$) эквивалентна суммѣ нѣкотораго постояннаго члена и извѣстныхъ гармоническихъ функцій времени

$$f(t)=A_0+A_1\sin(qt+E_1)+A_2\sin(2qt+E_2)+$$
$$A_3\sin(3qt+E_3)+\text{ и т. д. . . } (1).$$

Точно также звукъ, производимый трубкой органа, струной скрипки или другимъ музыкальнымъ инструментомъ, состоитъ изъ основнаго тона и его обертоновъ. Уравненіе (1) есть тоже самое, что и

$$f(t)=A_0+a_1\sin qt+b_1\cos qt+a_2\sin 2qt+b_2\cos 2qt+\text{ и т. д.},$$

если $a_1^2+b_1^2=A_1^2$ и $\operatorname{tang} E_1=\frac{b_1}{a_1}$, и т. д. †

126. Перемѣнное магнитное поле, имѣющее направленіе x, слѣдуетъ закону $X=a\sin qt$, гдѣ t есть время. Другое, направленное по y, составляющему прямой уголъ съ направленіемъ x, слѣдуетъ закону $Y=a\cos qt$.

Въ нѣкоторый моментъ равнодѣйствующее поле будетъ

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=a\text{ — постоянному},$$

составляющее съ y уголъ θ, причемъ

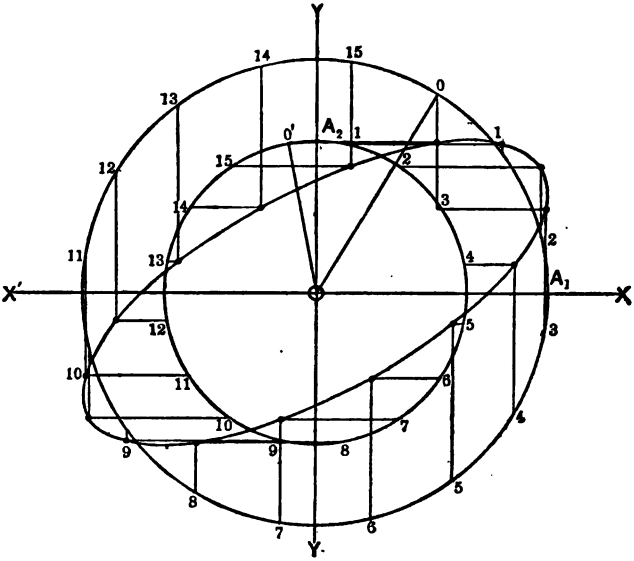
$$\operatorname{tang}\theta=\frac{Y}{X},\text{ или }\theta=qt.$$

Слѣдовательно, въ результатѣ получится постоянное поле R, вращающееся съ угловой скоростью q.

Когда поля будутъ

$$X = a_1 \sin(qt + \varepsilon_1) \text{ и } Y = a_2 \sin(qt + \varepsilon_2),$$

то лучше примѣнить графическій методъ изслѣдованія. Равнодѣйствующее поле выражается по величинѣ и по направ-



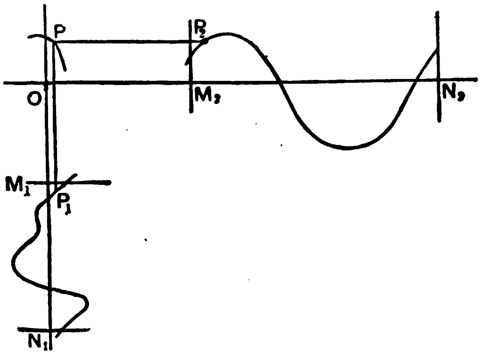
Черт. 69.

ленію радіусомъ векторомъ эллипса, описывающимъ въ равныя времена равныя площади.

Пусть OX и OY, черт. 69, будутъ два вышеупомянутыя направленія. Пусть OA_1 въ направленіи $OX = a_1$. Описываемъ кругъ радіусомъ OA_1. Пусть YOo изображаетъ уголъ e_1.

Раздѣлимъ кругъ на нѣсколько равныхъ частей, начиная съ точки O и называя точки дѣленія 0, 1, 2, 3 и т. д. Проведемъ изъ этихъ точекъ линіи параллельныя OY. Пусть OA_2 по направленію OY — равно a_2. Опишемъ кругъ

радіусомъ OA_2. Отложимъ уголъ $X'OO'$ равный e_2 и раздѣлимъ кругъ въ точкахъ $0'$, 1, 2, и т. д. на то же самое число частей, какъ и раньше. Если провести черезъ эти точки линіи параллельныя OX, то точки пересѣченія этихъ линій съ соотвѣтствующими линіями, проведенными отъ второго круга, представятъ собой концы радіусовъ векторовъ, которые будутъ выражать для любого момента по величинѣ и направленію равнодѣйствующее магнитное поле.



Черт. 70.

Если бы OX и OY даже и не были взаимпо перпендикулярны, то все таки этотъ способъ можетъ быть примѣненъ.

Если мы раздѣлимъ кругъ OA_2 на половину числа частей круга OA_1, то получимъ комбинацію $X = a_1 \sin (qt + \varepsilon_1)$ и $Y = a_2 \sin (2qt + \varepsilon_2)$.

Если мы хотимъ изобразить такую комбинацію: X = какой нибудь періодической функціи, а Y другой тоже періодической функціи, то пусть кривая отъ M_2 до N_2 выражаетъ Y, при чемъ M_2N_2 есть продолжительность періода; а кривая отъ M_1 до N_1 пусть показываетъ X, при чемъ вертикальное разстояніе M_1N_1 равно продолжительности періода. Если P_1 и P_2 суть точки на двухъ кривыхъ, соотвѣтствующія одному и тому же моменту времени, и если горизонталь, проведенная чрезъ P_2, встрѣчается съ вертикалью, проведенной черезъ P_1 въ точкѣ P, то въ этотъ

моментъ OP представляетъ равнодѣйствующее поле по направленію и величинѣ.

Тщательно изобразите это построеніе.

Оно можетъ служить типомъ рѣшенія всевозможныхъ задачъ, касающихся вращающихся магнитныхъ полей.

127. Площадь синусоиды для цѣлаго періода равна 0. Это очевидно для каждаго, кто начертитъ эту кривую. Докажемъ это расчетомъ; пусть s нѣкоторое цѣлое число и

$$q = \frac{2\pi}{T},$$

$$\int_0^T \sin sqt \,.\, dt = -\frac{1}{sq}\Big[_0^T \cos sqt\Big] =$$

$$= -\frac{1}{sq}\left(\cos s\,\frac{2\pi}{T}\,T - \cos\ 0\right) = 0,$$

такъ какъ $\cos\ s\frac{2\pi}{T}T$ или $\cos\ s2\pi = 1$ и $\cos\ 0 = 1$.

Точно также, $\int_0^T \cos sqt \,.\, dt = \frac{1}{sq}\Big[_0^T \sin\ sqt\Big]$

$$= \frac{1}{sq}\left(\sin\ s\,\frac{2\pi}{T}\,T - \sin\ 0\right) = 0,$$

такъ какъ $\sin\ s\,\frac{2\pi}{T}\,T = \sin\ s2\pi = 0$ и $\sin\ 0 = 0$.

128. Если ординаты двухъ синусоидъ перемножаются для того, чтобы получить ординату новой кривой, то площадь ея равна 0 для нѣкотораго періода, кратнаго каждаго изъ данныхъ періодовъ. Такъ, если s и r суть нѣкоторыя цѣлыя числа, то

$$\int_0^T \sin sqt \,.\, \cos rqt \,.\, dt = 0 \quad \ldots . \quad (1).$$

$$\int_0^T \sin sqt \,.\, \sin\ rqt \,.\, dt = 0 \quad \ldots . \quad (2).$$

$$\int_0^T \cos sqt \,.\, \cos rqt \,.\, dt = 0 \quad \ldots . \quad (3).$$

Это должно быть тщательно провѣрено.

Во первыхъ это будетъ упражненіе въ интегрированіи, а затѣмъ надо продѣлать это графически. Студенту не придется тратить слишкомъ много времени на разсмотрѣніе этихъ положеній съ различныхъ точекъ зрѣнія.

Онъ долженъ видѣть совершенно ясно, почему отвѣтъ въ данномъ случаѣ будетъ 0.

Дѣйствительно, функціи (1), (2) и (3) разлагаются на простыя гармоническія функціи, и интегралъ каждой такой функціи будетъ равенъ 0. Такъ.

$$2 \sin sqt \,.\, \cos rqt = \sin (s + r)\, qt + \sin (s - r)\, qt,$$

и по п. 127 каждая изъ нихъ имѣетъ площадь 0. Важность этихъ положеній для физики огромна. Теперь, если $s = r$, то положенія (2) и (3) не вѣрны, но (1) остается вѣрнымъ. Ибо

$$\int_0^T \sin^2 sqt \,.\, dt = \int_0^T \cos^2 sqt \,.\, dt = {}^1/_2 T \;.\;.\;. \quad (4),$$

между тѣмъ какъ (1) обращается въ интегралъ выраженія $^1/_2 \sin 2sqt$, равный 0. Уравненіе (4) нужно изслѣдовать графически, а также и при помощи простого интегрированія.

Припоминая изъ тригонометріи, что

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{ или } = 1 - 2 \sin^2 \theta,$$

а потому

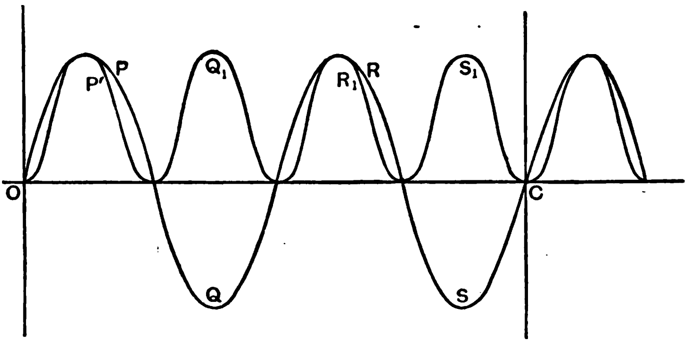
$$\cos^2 qt = {}^1/_2 \cos 2qt + {}^1/_2;\ \sin^2 qt = {}^1/_2 - {}^1/_2 \cos 2qt;$$

можно легко выполнить интегрированіе, и студентъ долженъ воспользоваться этимъ методомъ наравнѣ съ графическимъ.

129. Покажемъ это графически. Пусть OC, (черт. 71), выражаетъ T. Принявъ $s = 2$, получимъ кривую $OPQRSC$, представляющую $\sin sqt$. Наибольшая и наименьшая высота ея равна 1. Замѣтимъ, что $\sin^2 sqt$ всегда положителенъ и можетъ быть изображенъ кривой $OP'Q_1R_1S_1C$.

Она заключается между предѣлами 0 и 1, и средняя ея высота есть $^1/_2$, т. е. площадь цѣлой кривой отъ O до C равна $^1/_2\, T$.

То обстоятельство, что **среднее значеніе $\sin stq \times \sin rtq$ равно 0, а среднее значеніе $\sin sqt \times \sin sqt$ равно $^1/_2$, есть одно изъ самыхъ важныхъ для практическихъ инженерныхъ работъ.**



Черт. 71.

130. Приложеніе въ электричествѣ. Электрическій динамометръ имѣетъ двѣ обмотки; положимъ, что черезъ первую неподвижную, проходитъ токъ C; вторая—подвижная съ токомъ c. Въ нѣкоторый моментъ равнодѣйствующая сила пропорціональна Cc, что и даетъ возможность измѣрить среднее значеніе произведенія Cc. Проф. Айртонъ и авторъ книги произвели слѣдующій красивый и поучительный опытъ. Они пускали черезъ неподвижную обмотку токъ, который приблизительно былъ равенъ $C = C_0 \sin 2\pi ft$. Токъ этотъ доставлялся динамомашиной перемѣннаго тока. Черезъ другую обмотку они пропускали токъ $c = c_0 \sin 2\pi f_1 t$, число періодовъ котораго могло быть увеличиваемо или уменьшаемо. Было очень интересно наблюдать (для обыкновеннаго практика инженера это могло показаться страннымъ, почти невѣроятнымъ), что, хотя чрезъ обѣ обмотки пропускались большіе токи, средняя сила тока исчезала,—и, дѣйствительно, по шкалѣ нельзя было ничего замѣтить. Положимъ f было 100 въ секунду, а f^1 постепенно увеличивалось положимъ съ 10 до 20, 30, 40, 49. Между 49 и 51 едва, едва замѣтно было, но не ясно и неопредѣленно нѣкоторое дѣйствіе одной обмотки на другую, но измѣрить его

было невозможно, когда же f^1 увеличилось, взаимодѣйствіе прекратилось. Никакого дѣйствія не было замѣтно.

Никакого дѣйствія не было замѣтно, пока f' было 60, 70, 80, 90, 97, 98, 99, но когда f' приблизилось къ 100, то не было никакого сомнѣнія въ томъ, что тутъ проявлялось дѣйствіе большой средней силы; ее можно было измѣрить и по шкалѣ инструмента она оказалась равной $\frac{1}{2}C_0c_0$; когда f' перешло за предѣлъ 100, сила эта сразу исчезла, и оставалась все время равной нулю, пока f' не сдѣлалось равнымъ 200, и тогда проявилось небольшое взаимодѣйствіе, которое можно было измѣрить; опять оно внезапно прекратилось, пока f' не сдѣлалось равнымъ 300 и такъ далѣе. Мы знаемъ, что, если бы C и c были простыми гармоническими функціями, то тутъ абсолютно не могло бы проявиться никакой силы за исключеніемъ того случая, когда числа періодовъ были бы въ точности равны. На самомъ дѣлѣ, однако, тутъ примѣшивались октавы и верхніе гармоническіе тоны, и потому слабое дѣйствіе проявлялось, когда f и f' относились между собой, какъ $2:1$, или $1:2$, или $1:3$ и т. д. Этотъ фактъ крайне важенъ для всѣхъ инженеровъ электриковъ, которые имѣютъ дѣло съ перемѣнными электрическими токами.

131. Упражненіе въ интегрированіи. Пусть C и c перемѣнные электрическіе токи. Если $C = C_0 \sin\ qt$ и $c = c_0 \sin\ (qt \pm e)$, и эти два тока проходятъ черезъ двѣ обмотки электродинамометра, то приборъ отмѣтитъ $\frac{1}{2} C_0c_0 \cos e$, такъ какъ это есть средняя величина произведенія Cc.

Когда C и c равны между собой, т. е. когда одинъ и тотъ же токъ $C = C_0 \sin\ (qt + e)$ проходитъ черезъ обѣ обмотки, приборъ занимаетъ среднее значеніе $C^2\,dt$ или

$$\frac{1}{T}\int_0^T C_0^2 \sin^2 (qt + e)\,.\,dt\,.\,.\,.\,.\,.\,(1),$$

которое, какъ мы знаемъ, равно $\frac{1}{2}C_0^2$. Квадратный корень изъ такого выраженія обыкновенно называется дѣйствующимъ токомъ, такъ что $\frac{1}{\sqrt{2}}C_0$ есть то, что извѣстно подъ названіемъ дѣйствующей величины $C_0 \sin qt$. Дѣйствующая сила тока можетъ быть опредѣлена какъ квадратный корень изъ средняго значенія квадрата тока. Такимъ образомъ, когда инженеръ электрикъ говоритъ о перемѣнномъ токѣ

силой 100 амперъ, то онъ подразумѣваетъ подъ этимъ то, что дѣйствующая сила тока равна 100 амперъ или что $C = 141{,}4 \sin (qt + a)$. Также вольтажъ равный 1000 означаетъ

$$v = 1414 \sin (qt + \beta).$$

Упражненіе. Какова будетъ *дѣйствующая* величина

$$a_0 + A_1 \sin (qt + \varepsilon_1) + A_2 \sin (2qt + \varepsilon_2) + \text{и т. д.}$$

Замѣтимъ, что среднюю величину имѣютъ только квадраты членовъ, интегралъ всякаго другого произведенія для цѣлаго періода равенъ нулю. Отвѣтъ:

$$\sqrt{a_0^2 + {}^1/_2 (A_1^2 + A_2^2 + \text{и т. д.})}.$$

Обратите вниманіе на то, какое малое значеніе имѣютъ малые обертоны.

$$\text{Если } v = \frac{4v_0}{\pi} (\sin qt + {}^1/_3 \sin 3qt + {}^1/_5 \sin 5qt \text{ и т.д.}) \; . \; . (2),$$

то на основаніи п. 135 мы можемъ видѣть, что это есть

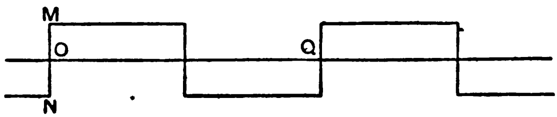


Рис. 72.

рядъ Фурье, который можетъ быть представленъ кривой (черт. 72), гдѣ разстояніе OM равно v_0, а разстояніе OQ изображаетъ продолжительность періода T, причемъ $q = \frac{2\pi}{T}$, и v считается отъ линіи OQ вверхъ.

Дѣйствующая сила

$$v = \frac{4v_0}{\pi \sqrt{2}} \sqrt{1 + {}^1/_9 + {}^1/_{25} + {}^1/_{49} + \text{и т. д.}} \; . \; . \; . \; . (3)$$

Точно также по черт. 73, гдѣ $PM = v_0$ и $OQ = T$.

$$v = \frac{8v_0}{\pi^2} (\sin qt - {}^1/_9 \sin 3qt + {}^1/_{25} \sin 5qt - \text{и т. д.}) \; . \; . (4)$$

Дѣйствующая сила

$$v = \frac{8v_0}{\pi^2 \sqrt{2}} \sqrt{1 + {}^1/_{81} + {}^1/_{625} + \text{ и т. д.}} \quad \ldots \ldots (5)$$

Опять видимъ какое ничтожное значеніе имѣютъ всѣ члены за исключеніемъ основного.

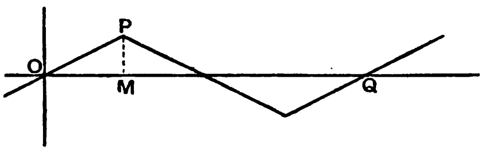


Рис. 73.

Упражненіе.

Если $C = C_0 + A_1 \sin qt + B_1 \cos qt +$
$+ A_2 \sin 2qt + B_2 \cos 2qt + \text{и т. д.} \ldots (6),$

и если

$$c = c_0 + a_1 \sin qt + b_1 \cos qt + a_2 \sin 2qt + b_2 \cos 2qt + \text{и т.д.} \ldots (7).$$

То среднее значеніе

$$Cc = C_0 c_0 + {}^1/_2 (A_1 a_1 + B_1 b_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + \text{и т. д}). \quad .(8).$$

Легко видѣть, что въ это выроженіе не входятъ члены подобные $A_2 b_2$ или $A_2 b_3$.

132. Пусть AB и BC части нѣкоторой электрической цѣпи. Пусть AB сопротивленіе R, а самоиндукція отсутствуетъ. Въ BC пусть сопротивленіе r, а самоиндукція l. Положимъ $C = C_0 \sin qt$ — проходящій по цѣпи токъ. Пусть V_{AB} и т. д. дѣйствующій вольтажъ между точками A и B, а $\overline{V}_{AB}$ *дѣйствующій* вольтажъ между A и B.

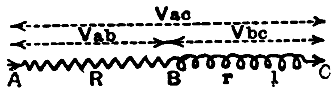


Рис. 74.

$$V_{AB} = RC_0 \sin qt$$

$$V_{BC} = C_0 \sqrt{r^2 + l^2 q^2} \sin\left(qt + \operatorname{arctg} \frac{lq}{r}\right) \text{(см. п. 118).}$$

$$V_{AC} = C^0 \sqrt{(R + r)^2 + l^2 q^2} \sin\left(qt + \operatorname{arctg} \frac{lq}{R + r}\right)$$

$$\overline{V}_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}RC_0$$

$$\overline{V}_{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}rC_0\sqrt{1+\frac{l^2q^2}{r^2}}$$

$$\overline{V}_{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}(R+r)C_0\sqrt{1+\frac{l^2q^2}{(R+r)^2}}$$

Замѣтимъ, что $\overline{V}_{AC}$ **всегда менѣе** $\overline{V}_{AB}+\overline{V}_{BC}$, **иначе говоря, дѣйствующій вольтажъ между A и C всегда менѣе суммы дѣйствующихъ вольтажей между A и B и между B и C.**

Такъ, возьмите $C_0=141{,}4$, $R=1$, $r=1$, $lq=1$ и выясните на примѣрѣ этотъ фактъ, который иногда ставитъ втупикъ инженеровъ электриковъ.

132. Правило для разложенія произвольной функціи въ рядъ Фурье.

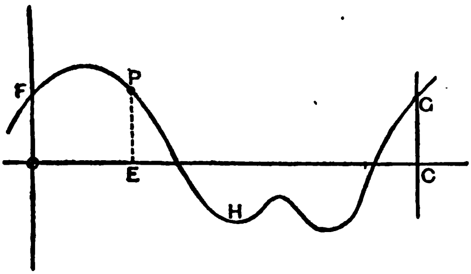


Рис. 75.

Функція можетъ быть изображена кривой (см. черт. 75) гдѣ PE представляетъ значеніе y въ моментъ t, который изображается длиной OE, OC представляетъ время цѣлаго періода T. За точкой C кривая снова повторятся (Вмѣсто буквы t мы можемъ взять x, или какую угодно другую. Бываютъ функціи періодическія, напримѣръ, въ отношеніи пространства). Положимъ, что y можетъ быть разложено въ рядъ такъ:

$$y=a_0+a_1\sin qt+b_1\cos qt+a_2\sin 2qt+b_2\cos 2qt$$
$$+a_3\sin 3qt+b_3\cos 3ql+\ldots (1)$$

гдѣ
$$q=\frac{2\pi}{T}$$

Изъ выводовъ, полученныхъ въ п. 127 очевидно, что **a_0 есть средняя высота кривой**, или среднее значеніе y. Она можетъ быть найдена тѣмъ же способомъ, какимъ находятъ среднюю высоту индикаторной діаграммы. Обведемъ остріемъ планиметра, начиная съ O по линіи $OFPHGCO$, и раздѣлимъ опредѣленную такимъ образомъ площадь на OC. Если кривая не вычерчена, а даны, положимъ, 36 равноотстоящихъ значеній y, то сложимъ ихъ и раздѣлимъ на 36. Объясненіе этого заключается въ слѣдующемъ: площадь всей кривой или интегралъ y между предѣлами O и T равенъ Ta_0, потому что интегралъ всякаго другого члена подобнаго, напримѣръ, $a_1 \sin qt$ или $b_3 \cos 3qt$, равенъ 0, Дѣйствительно

$$\int_0^T \sin sqt\,.\,dt \text{ или} \int_0^T \cos sqt\,.\,dt = 0,$$

если s цѣлое число.

a_1 есть двойная средняя высота кривой, получающейся отъ перемноженія ординатъ y на соотвѣтствующую ординату $\sin qt$, ибо, если умножить (1) на $\sin qt$ и проинтегрировать отъ 0 до T, то по п. 128 мы получимъ

$$\int_0^T y\,.\sin qt\,.\,dt = \mathbf{0} + a_1 \int_0^T \sin^2 qt\,.dt + 0 + 0 \text{ и т. д.} =$$

$$= {}^1/_2\, a_1 T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1);$$

раздѣляя это на T, получимъ среднее значеніе, которое, будучи умножено на 2, дастъ очевидно a_1. Подобнымъ же образомъ

$$\int_0^T y\,.\cos qt\,.dt = {}^1/_2\, b_1 T \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Окончательно, на основаніи принциповъ п. 128, **a_s и b_s суть двойныя среднія величины $y \sin sqt$ и $y \cos sqt$**, или

$$\left.\begin{aligned} a_s &= \frac{2}{T}\int_0^T y\,.\sin sqt\,.dt \\ b_s &= \frac{2}{T}\int_0^T y\,.\cos sqt\,.dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (3).$$

134. Въ журналѣ *Electrician* отъ 5 февраля 1892 года, авторъ далъ ясныя указанія, какъ производить численно

этотъ расчетъ, если даны 36 чиселъ, выражающихъ равноотстоящія значенія y.

Въ томъ же журналѣ 28 іюня 1895 г., авторъ описалъ **графическій методъ** полученія этихъ коэффиціентовъ. Графическій методъ можно особенно рекомендовать для разложенія какой нибудь произвольной функціи.

Студенты, которые познакомятся съ оригиналомъ, замѣтятъ, что здѣсь абсциссы получаются очень быстро, и кривая легко вычерчивается.

Въ этомъ случаѣ кривую, показывающую y и время, наносятъ на боковой поверхности круглаго цилиндра, съ окружностью равной продолжительности періода. Кривая проектируется на діаметральную плоскость, проходящую черезъ $t = 0$. Двойная площадь проекціи, раздѣленная на окружность цилиндра равна a_1. Проектируя кривую на плоскость, находящуюся подъ прямымъ угломъ къ первой, мы получимъ тѣмъ же путемъ b_1. Если кривая нанесена на окружности s разъ вмѣсто одного и спроектирована на двѣ діаметральныя плоскости, то двойныя площади каждой изъ двухъ проекцій, дѣленныя на s окружностей цилиндра, дадутъ a_s и b_s *).

Анализы проф. Генричи, описанные въ *Proceedings of the Physical Society*, даютъ коэффиціенты быстро и точно. Методъ Видмора, опубликованный въ *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, въ мартѣ 1896 года, мнѣ кажется очень удобенъ въ томъ случаѣ, если данъ рядъ чиселъ, выражающихъ равноотстоящія значенія y.

135. Если періодическая функція изображается графически прямыми линіями, какъ на черт. 72 и 73, то мы можемъ получить разложеніе въ рядъ непосредственнымъ

---

*) Этотъ методъ основанъ на томъ, что

$$a_s = \frac{2}{T}\int_0^T y \sin . sqt . dt = -\frac{2}{sqT}\int y . d(\cos qst) = -\frac{1}{s\pi}\int y . d(\cos sqt).$$

Вычертивъ полную кривую, въ которой y (въ моментъ t) есть ордината, а $\cos sqt$ абсцисса, мы увидимъ, что ея площадь, опредѣленная планиметромъ, раздѣленная на $s\pi$ дастъ a_s. Подобный графическій методъ примѣняется для разложенія произвольныхъ функцій въ ряды не только синусовъ и косинусовъ, но и другихъ функцій, напримѣръ сферо-зональныхъ, гармоническихъ и функцій Бесселя.

По тому же методу найдемъ, $b_s = \frac{1}{s\pi}\int y . d(\sin sqt)$.

интегрированіемъ, Такъ на черт. 76 показана кривая, называемая «make and break» *).
$y=OA$, или положимъ, $2v_0$ отъ $t=O$ до $t=OP={}^1/_2\,T$; $y=0$ отъ $t={}^1/_2\,T$, или OP, до $t=T$, или OQ.

Очевидно, что $$a_0=v_0,\ q=\frac{2\pi}{T},$$

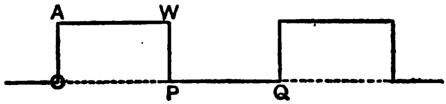


Рис. 76.

$$a_s=\frac{2}{T}\int_0^{{}^1/_2T}2v_0.\sin sqt\,.\,dt,\ b_s=\frac{2}{T}\int_0^{{}^1/_2T}2v_0\cos sqt.\,dt,$$

$$a_s=-\frac{4v_0}{T}\cdot\frac{T}{2s\pi}\left[\cos s.\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{{}^1/_2T},\ b_s=\frac{4v_0}{T}\cdot\frac{T}{2s\pi}\left[\sin s.\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{{}^1/_2T},$$

$$a_s=-\frac{2v_0}{s\pi}(\cos s\pi-\cos 0)=-\frac{2v_0}{s\pi}\begin{pmatrix}0 \text{ при } s \text{ четномъ}\\ -2 \text{ при } s \text{ нечетномъ}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{4v_0}{s\pi} \text{ при } s \text{ нечетномъ}$$

$$b_s=\frac{2v_0}{s\pi}(\sin s\pi-\sin 0)=0.$$

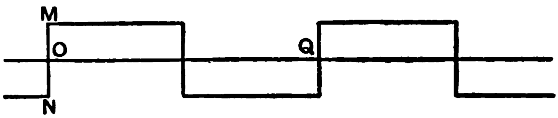


Рис. 77.

Отсюда функція, изображенная на черт. 76, принимаетъ видъ

$$y=v_0+\frac{4v_0}{\pi}(\sin qt+{}^1/_3\sin 3qt+{}^1/_5\sin 5qt+\text{и т. д.})\ldots(1).$$

Пусть начало періода находится на половинѣ разстоянія между O и A (черт. 76), какъ на черт. 77, такъ что

*) Примѣчаніе перев. Въ буквальномъ переводѣ «сдѣлать и сломать».

вмѣсто кривой, которую электрики называютъ «make and break», мы получимъ для одной половины періода $+v_0$ постоянное, а для другой половины $-v_0$; то есть для каждой половины періода противоположныя по знаку величины y; вычитаемъ изъ предыдущей функціи v_0, тогда

$$y=\frac{4v_0}{\pi}(\sin qt+{}^1/_3\sin 3qt+{}^1/_5\sin 5qt+\text{и т. д.})\ldots(2)$$

Пусть начало лежитъ посерединѣ между O и P, (черт. 76); t въ (1) нужно замѣнить черезъ $(t+{}^1/_4 T)$.

$\sin sqt$, гдѣ s нечетное, приметъ видъ $\sin sq(t+{}^1/_4 T)$,

или $$\sin s\frac{2\pi}{T}(t+{}^1/_4 T),\ \text{или}\ \sin\left(sqt+s\frac{\pi}{2}\right),$$

при $s=1,\ 5,\ 9,\ 13$ и т. д. это равно $\cos sqt$,
» $s=3,\ 7,\ 11,\ 15$ и т. д. » » $-\cos sqt$,

а слѣдовательно при началѣ періода, находящемся въ точкѣ, лежащей по серединѣ между O и P,

$$y=v_0+\frac{4v_0}{\pi}(\cos qt-{}^1/_3\cos 3qt+{}^1/_5\cos 5qt-{}^1/_7\cos 7qt+$$
$$+\text{и т. д.}).$$

136. Чтобы представить періодическую функцію x для всѣхъ значеній, нужно получить рядъ членовъ, **каждый изъ которыхъ самъ по себѣ представляетъ періодическую функцію**. Рядъ Фурье есть простѣйшій изъ нихъ.

137. Если даны значенія y функціи отъ x для всѣхъ значеній x между $x=0$ и $x=c$, то y можетъ быть разложено или **въ рядъ только синусовъ или въ рядъ косинусовъ**. Въ этомъ случаѣ мы разсматриваемъ данную часть какъ половину полной періодической функціи и не обращаемъ вниманія на то, какимъ представится рядъ при $x<0$ и $>c$. Въ предыдущемъ же случаѣ y было дано полностью для всѣхъ значеній перемѣннаго.

I. Возьмемъ $y=a_1\sin qx+a_2\sin 2qx+$и т. д. гдѣ, $q=\pi/c$.

Умножимъ это на $\sin sqx$ и проинтегрируемъ въ предѣлахъ между O и c. Легко убѣдиться въ томъ, что всѣ члены исчезнутъ за исключеніемъ $\int_0^c a_s\sin^2 sqx\,.\,dx$, который равенъ ${}^1/_2\,a_s c$, такъ что a_s оказывается равнымъ двойному среднему значенію $y\,.\,\sin sqx$.

Такъ, пусть y равно постоянному m, тогда

$$a_s = \frac{2}{c}\int_0^c m \sin sqx \,.\, dx = -\frac{2m}{csq}\Big[_0^c \cos sqx \Big]$$

$$= -\frac{2m}{csq}(\cos s\pi - 1) = \frac{4m}{s\pi},\ \text{если } s \text{ нечетное, и}$$

$$= 0,\ \text{если } s \text{ четное.}$$

Отсюда $$m = \frac{4m}{\pi}(\sin qx + {}^1/_3 \sin 3qx + {}^1/_5 \sin 5qx.)\ ^{*}).$$

II. Возьмемъ рядъ $y = b_0 + b_1 \cos qx + b_2 \cos 2qx$.. Здѣсь b_0 очевидно есть среднее значеніе y между $x = 0$ и. $x = c$. Тѣмъ же путемъ, какъ и раньше, мы можемъ доказать, что b_s есть двойная средняя величина $y \cos sqx$ **).

138. Въ п. 118 мы дали уравненіе для электрической цѣпи. Исчезающій членъ входитъ въ него, но мы можемъ пренебречь имъ. Замѣтимъ, что если V есть не простая гармоническая функція t, а сложная періодическая функція,

---

*) *Упражненіе.* Разложить $y = mx$ въ рядъ синусовъ въ предѣлахъ между $x = o$ и $x = c$.

$$mx = a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx...,\ \text{гдѣ } q = \frac{\pi}{c}$$

$$a_s = \frac{2}{c}\int_0^c mx \,.\sin sqx \,.\, dx = \frac{2m}{s^2q^2c}\Big[_0^c \sin sqx - sqx \,.\cos sqx\Big].$$

Относительно этого интеграла см. задачу (70) пункта 271.

Отсюда $$mx = \frac{2mc}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{c} x - {}^1/_2 \sin\frac{2\pi}{c} x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{c} x - \text{и т. д.}\right).$$

**) Такъ пусть $y = mx$ между $x = 0$ и $x = c$. Очевидно $b_0 = {}^1/_2\, mc$ и мы найдемъ, что

$$y = \frac{m\pi}{2} - \frac{4m}{\pi}\left(\cos qx + \frac{1}{9}\cos 3qx + \frac{1}{25}\cos 5qx...\right).$$

Есть много другихъ способовъ по которымъ можно разложить любую произвольную функцію x. Но даже и для синусовъ и косинусовъ можно дать видъ иной, чѣмъ въ предыдущихъ случаяхъ. Напримѣръ, если мы хотимъ разложить y, функцію x въ предѣлахъ между O и c въ рядъ, общій видъ котораго $y = \Sigma a_m \sin a_m x$ по методу Фурье, существенный принципъ котораго выражается въ равенствѣ $\int_0^c \sin a_n x \,, \sin a_m x \,.\, dx = 0$, гдѣ m и n различныя числа то мы должны найти am и $a\pi$, какъ корни уравненія $\frac{ac \cos ac}{\sin ac} = s$

Въ простомъ рядѣ Фурье $s = \infty$.

то каждому члену ея будетъ соотвѣтствовать членъ того же періода въ выраженіи силы тока. Такъ, если

$$V = V_0 + \Sigma\, V_s \sin(sqt + e_s)^{\dagger} \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$C = \frac{V_0}{R} + \Sigma \frac{V_s}{\sqrt{R^2 + L^2 s^2 q^2}} \sin\left(sqt + e_s - \operatorname{arctg} \frac{sLq}{R}\right) \ldots (2).$$

Если Lq очень велико сравнительно съ R, то мы можемъ принять

$$C = \frac{V_0}{R} - \Sigma \frac{V_s}{Lsq} \cos(sqt + e_s) \ldots\ldots\ldots (3).$$

Такъ, взявъ для V кривую черт. 76,

$$V = V_0 + \frac{4V_0}{\pi}(\sin qt + {}^1/_3 \sin 3qt \ldots) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

получимъ

$$C = \frac{V_0}{R} - \frac{2V_0 T}{\pi^2 L}(\cos\ qt + {}^1/_9 \cos 3qt + {}^1/_{25} \cos 5qt \ldots) \ldots (5)$$

что на черт. 73 представлено въ видѣ кривой, гдѣ O находится при $\frac{T}{4}$.

139. Когда **электрическая энергія** доставляется на домъ или къ какому либо механизму, энергія въ ваттахъ есть средняя величина CV, гдѣ C сила тока въ амперахъ, а V вольтажъ.

Пусть $V = V_0 \sin qt$ и $C = C_0 \sin(qt - e)$.

Тогда $P = {}^1/_2\, C_0 V_0 \cos e^{\dagger}$ или половинѣ произведенія амплитудъ, умноженной на косинусъ угла запаздыванія фазы. Если энергія измѣряется при помощи динамометра, при чемъ C проходитъ черезъ одну обмотку, а въ другой обмоткѣ съ сопротивленіемъ r и самоиндукціей l, V производитъ токъ c, то

$$c = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + l^2 q^2}} \sin\left(qt - \operatorname{arctg} \frac{lq}{r}\right) \ldots (6),$$

что даетъ возможность измѣрить среднее значеніе Cc или

$$ {}^1/_2 \frac{C_0 V_0}{\sqrt{r^2 + l^2 q^2}} \cos\left(e - \operatorname{arctg} \frac{lq}{r}\right).$$

Обыкновенно, въ этихъ приборахъ боль-

шія сопротивленія безъ индукціи включаются въ цѣпь изъ тонкой проволоки и мы можемъ принять, что lq настолько мало въ сравненіи съ r, что квадратомъ его можно пренебречь. Въ такомъ случаѣ

$$\frac{\text{кажущаяся энергія}}{\text{дѣйствующая энергія}} = \frac{\cos\left(e - \operatorname{arctg}\frac{lq}{r}\right)}{\cos e}.$$

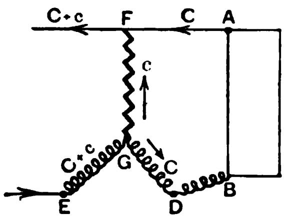
Замѣтимъ, что $\operatorname{arctg}\frac{lq}{r}$ есть очень малый уголъ, —назовемъ его α; тогда $\frac{\text{кажущаяся энергія}}{\text{дѣйствующ. энергія}} = \frac{\cos e \cos\alpha + \sin e \,.\, \sin\alpha}{\cos e} =$
$= \cos\alpha + \sin\alpha$.

Но $\cos\alpha$ близко къ 1, а $\sin\alpha$ мало и по первому взгляду можетъ показаться, что мы можемъ считать результатъ близкимъ къ 1.

Но, если e близко къ 90°, его тангенсъ можетъ быть очень великъ, и тогда **кажущаяся энергія можетъ быть гораздо болѣе дѣйствительной.**

Однако рѣдко бываетъ, чтобы e было близко къ 90°, если только въ обмоткахъ достаточно большого діаматра нѣтъ желѣза, и приняты мѣры для предупрежденія паразитныхъ токовъ. Даже, когда энергія сообщается обмоткѣ съ сердечникомъ или ненагруженному трансформатору, вліяніе гистерезиса не можетъ заставить e превзойти величину 74°.

140. Вѣрный счетчикъ энергіи. Пусть EG и GD обмотки, смотанныя вмѣстѣ, какъ въ неподвижной части динанометра, а DB пусть будетъ подвижная обмотка. Отъ E къ G проходитъ токъ $C+c$. Часть его c направляется по GF съ сопротивленіемъ R безъ индукціи. Часть C течетъ отъ G къ D и отъ D къ B въ домъ или къ механизму. Величина энергіи въ данный моментъ выражается величиной $Rc \,.\, C$.

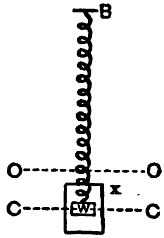


Черт. 78.

Обмотки EG и GD тщательно вывѣряются, такъ, чтобы при $c=O$ и при постоянномъ токѣ не было отклоненія подвижной обмотки. Благодаря этому

комбинированное дѣйствіе $C+c$ въ EG и C въ $G\dot{D}$ на C въ DB производитъ силу или моментъ вращенія пропорціональный Cc, а отсюда показаніе прибора пропорціонально энергіи. При перемѣнныхъ токахъ также не будетъ отклоненія, если только вблизи нѣтъ металла, въ которомъ могутъ индуктироваться токи.

141. Студентъ долженъ привыкнуть къ переводу на обыкновенный языкъ такого опредѣленія, какое дано въ (1) п. 119. Имѣя это въ виду, изслѣдуемъ массу въ W фунтовъ *), подвѣшенную къ пружинѣ такой упругости что сила въ 1 фунтъ удлиняетъ ее на h футъ. Положимъ, что эта масса колеблется вверхъ и внизъ; когда W находится на уровнѣ CC (черт. 79) на x футъ (мы воображаемъ, что движеніе направлено внизъ) ниже положенія равновѣсія OO, то сила, дѣйствующая на нее по направленію къ положенію равновѣсія равна $\frac{x}{h}$ фунтовъ, и, такъ какъ движущаяся масса есть $\frac{W}{g}$, (пренебрежемъ массой самой пружины или будемъ считать только одну треть ея, какъ прибавленной къ массѣ движущагося тѣла).



Черт. 79.

$$\frac{W}{g}\times \text{ускореніе}=\frac{x}{h}.$$

Ускоренное равно $=\frac{xg}{Wh}$. Такимъ образомъ ускореніе пропорціонально x, и въ (1) п. 119 вмѣсто g^2 нужно подставить $\frac{g}{Wh}$, (2) же дастъ законъ, связующій x и t.

Обратите особенное вниманіе на то, что знакъ $+$ въ (1) правиленъ. Тѣло движется книзу и x возрастаетъ, такъ что

---

*) Названіе W фунт. означаетъ вѣсъ нѣкотораго количества матеріи, инерція ея въ инженерныхъ единицахъ есть $\frac{W}{32{,}2}$

$\frac{dx}{dt}$ положительно. Но $\frac{d^2x}{dt^2}$ отрицательно, такъ какъ движеніе тѣла замедляется по мѣрѣ возрастанія x.

142. Вообразимъ, что движеніе тѣла замедляется силой, пропорціональной его скорости $b\frac{dx}{dt}$. Замѣтимъ, что она дѣйствуетъ такъ же, какъ и $\frac{x}{h}$, т. е. вверхъ по направленію къ положенію равновѣсія.

Отсюда мы можемъ написать

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\frac{x}{h}=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Мы можемъ отсюда видѣть, какой законъ связываетъ x и t при подобной **ослабляемой вибраціи**.

143. Положимъ, что въ послѣднемъ примѣрѣ, когда тѣло перемѣстилось внизъ на x футъ, точка привѣса B также опустилась на y футъ ниже своего прежняго положенія. Пружина въ дѣйствительности вытянута только на $x-y$, и возстанавливающая сила равна $\frac{x-y}{h}$. Слѣдовательно (1) приметъ видъ.

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\frac{x}{h}=\frac{y}{h} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Теперь представимъ себѣ, что движеніе y дано въ функціи времени, и намъ нужно найти x, какъ функцію времени. Вставка въ уравненіе величины y обусловливаетъ то, что обыкновенно называютъ **форсированной вибраціей**. Если $y=0$, то мы имѣемъ дѣло съ естественнымъ колебаніемъ.

Мы привели эту задачу не для того, чтобы здѣсь же дать ея рѣшеніе, хотя это и не трудно, но съ тѣмъ, чтобы познакомить студента съ дифференціальными уравненіями и показать ему, какъ переводить ихъ на обыкновенный языкъ.

144. Замѣтимъ, что если **угловое** отклоненіе твердаго тѣла отъ его положенія равновѣсія есть θ, если I его мо-

ментъ инерціи вокругъ оси, проходящей черезъ его центръ тяжести, $H\theta$ сумма моментовъ вокругъ той же оси силъ, сопротивляющихся движенію, и $F\frac{d\theta}{dt}$ моментъ силъ тренія, которыя пропорціональны скорости, то

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+F\frac{d\theta}{dt}+H\theta=H\theta' \quad \ldots\ldots (3),$$

гдѣ θ' есть угловое перемѣщеніе отъ внѣшней силы того ящика, къ которому прикрѣплена пружина или какой либо упругій приборъ.

145. Слѣдующій примѣръ очень хорошъ. Возвращаясь къ случаю 1 п. 98 мы имѣемъ CR — вольтажъ въ цѣпи, соединяющей обкладки конденсатора. Если мы примемъ въ разсчетъ самоиндукцію цѣпи L, то вольтажъ v выразится такъ:

$$RC+L\frac{dC}{dt}=v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Мы можемъ идти далѣе и сказать, что, если въ цѣпь включенъ альтернаторъ, съ электродвужущей силой e въ нѣкоторый моментъ, (если считать e постоянной электродвижущей силой, то она будетъ противоположна C, какъ показано на черт.), то

$$RC+L\frac{dC}{dt}=v-e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Но мы видѣли, что сила тока $C=-K\frac{dv}{dt}$ . . . . . . (6).

Пользуясь этой величиной C для (5), мы получимъ

$$-RK\frac{dv}{dt}-LK\frac{d^2v}{dt^2}=v-e,$$

или

$$LK\frac{d^2v}{dt^2}+RK\frac{dv}{dt}+v=e \quad \ldots\ldots (7).$$

Теперь представимъ себѣ, что e дано въ функціи времени, и намъ нужно найти v, какъ функцію времени.

e обусловливаетъ собою въ системѣ то, что обыкновенно называютъ **форсированнымъ вибраціоннымъ токомъ**. Если

$e = O$, мы имѣемъ только естественныя вибрацій. Имѣя v, мы по (6) получимъ C.

146. Если (7) сравнимъ со (2) и (3), то мы сразу видимъ **аналогію между механической вибрирующей системой и электрической**

Ее можно представить такъ:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\frac{x}{h}=\frac{y}{h} \text{ механическая система } \quad . \ . \ (8).$$

$$L\frac{d^2v}{dt^2}+R\frac{dv}{dt}+\frac{v}{K}=\frac{e}{K} \text{ электрическая система } . \ . \ (9).$$

Масса $\frac{W}{g}$ соотвѣтствуетъ самоиндукціи L.

Треніе на длинѣ фута въ секунду b соотвѣтствуетъ сопротивленію R.

Перемѣщеніе x отвѣчаетъ элекродвижущей силѣ v, или, повидимому болѣе точно, v есть Q — количество перемѣщеннаго электричества, дѣленное на K.

Упругость пружины h соотвѣтствуетъ емкости конденсатора K.

Перемѣщеніе отъ внѣшней силы y соотвѣтствуетъ электродвижущей силѣ, которую даетъ альтернаторъ†.

147. Полное рѣшеніе уравненій (8) и (9), т. е. выраженіе x или v въ функціи t, будетъ состоять изъ:

1) рѣшенія при томъ условіи, что y или $e = 0$.

Это условіе соотвѣтствуетъ **естественной вибраціи** системы, которая прекращается сама собой, въ зависимости отъ механическаго тренія въ первомъ случаѣ и отъ электрическаго тренія или сопротивленія во второмъ. Далѣе мы примемся за изученіе этой вибраціи. Безъ поясненій должно быть очевиднымъ, что если y или e равно 0, то мы имѣемъ дѣло съ тѣмъ случаемъ, когда система предоставлена самой себѣ.

2) Рѣшенія для того случая, когда имѣются одни только **форсированныя вибраціи**.

Сумма этихъ двухъ результатовъ очевидно дастъ полное рѣшеніе.

148. Форсированная вибрація. Такъ какъ приведенные два случая въ механикѣ и въ электричествѣ аналогичны, изучимъ механическія вибраціи, которыя легче себѣ представить. Во первыхъ, мы должны пренебречь треніемъ и естественными вибраціями, хотя на самомъ дѣлѣ всегда существуетъ нѣкоторое треніе. Тогда (8) получаетъ видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{Wh}x=\frac{g}{Wh}y \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

Пусть уравненіе $y=a \sin qt$ представляетъ движеніе, сообщенное точкѣ привѣса спиральной пружины, несущей вѣсъ W; y можетъ быть какой либо сложной періодической функціей, но мы разсматриваемъ только одинъ членъ ея.

Мы знаемъ, что, еслибы y было 0, то естественная вибрація выразилась бы уравненіемъ $x=b \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{Wh}}+m\right)$, гдѣ b и m могутъ быть какими угодно величинами. Проще будетъ пользоваться n^2 вмѣсто $\frac{g}{Wh}$, такъ какъ намъ приходится изъ этого количества извлекать квадратный корень n есть 2π, умноженное на число періодовъ въ секунду естественныхъ вибрацій W. Мы можемъ переписать уравненіе такъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=n^2y=n^2a\sin qt \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Теперь попробуемъ, не есть ли его рѣшеніе $x=A \sin qt+ +B \cos qt$. Если это такъ, то $\frac{d^2x}{dt^2}=-Aq^2 \sin qt - Bq^2 \cos qt$; приравнивая коэффіенты $\sin qt$ и $\cos qt$, получимъ $-Aq^2+n^2A=n^2a$, такъ что $A=\frac{n^2a}{n^2-q^2}$, и $-Bq^2+n^2B=0$, такъ что $B=0$, если только n не равно q. Слѣдовательно мы имѣемъ рѣшеніе

$$x=\frac{n^2a}{n^2-q^2}\sin qt \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Это показываетъ, что **форсированная вибрація** W син-

хронична съ движеніями точки опоры, а его амплитуда въ $\dfrac{1}{1-\dfrac{q^2}{n^2}}$ разъ болѣе амплитуды точки опоры. Теперь возьмемъ нѣсколько чиселъ, чтобы пояснить нашъ выводъ. Пусть $a = 1$, и пусть $\frac{q}{n}$ имѣетъ различныя значенія. Такъ, $\frac{q}{n} = \frac{1}{10}$ означаетъ, что число періодовъ форсированной вибраціи есть $^1/_{10}$ числа періодовъ естественной вибраціи.

$\frac{b}{n}$	Амплитуда движенія W	$\frac{q}{n}$	Амплитуда движенія W
0·1	1·01	1	∞
0·5	1·333	1·01	— 50
0·8	2·778	1·03	— 16·4
0·9	5·263	1·1	— 4·762
0·95	10·26	1·5	— 0·8
0·97	16·92	2·0	— 0·333
0·98	25·25	5·0	— 0·042
0·99	50·25	10·0	— 0·010

Замѣтимъ, что, когда число форсированныхъ періодовъ составляетъ малую часть числа естественныхъ періодовъ, форсированная вибрація W есть **точная копія** движенія точки опоры B; пружина и W движутся подобно твердому тѣлу. Когда форсированное движеніе дѣлается болѣе быстрымъ, движеніе W является какъ бы **преувеличеннымъ движеніемъ** B. Когда форсированная вибрація становится близкой къ естественной, движеніе W обращается въ **весьма сильно преувеличенное движеніе** B. Но всегда существуетъ нѣкоторое сопротивленіе, а потому амплитуда вибраціи не можетъ сдѣлаться безконечной. Когда число форсированныхъ періодовъ больше числа естественныхъ, W всегда отстаетъ **на полъ періода отъ** B, находясь наверху своего пути въ тотъ моментъ, когда B находится внизу. Когда число форсированныхъ періодовъ въ нѣсколько разъ болѣе числа естественныхъ, движеніе W становится **очень малымъ**: масса почти находится въ покоѣ.

Тѣ, кто проектируютъ **сейсмографы**, стараются найти постоянную точку, остающуюся въ покоѣ, въ то время, какъ все окружающее находится въ движеніи. Замѣтимъ, что при движеніи вверхъ и внизъ въ послѣднемъ только что упомянутомъ случаѣ W есть подобная постоянная точка.

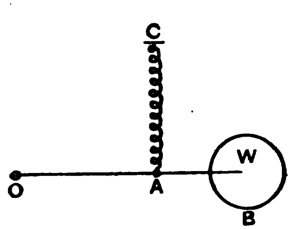
Когда числа періодовъ форсированныхъ и естественныхъ вибрацій приблизительно равны, то мы имѣемъ дѣло съ тѣмъ случаемъ, который обусловливаетъ **резонансъ** въ музыкальныхъ инструментахъ; эти обстоятельства также заставляютъ насъ бояться висячихъ мостовъ и судовъ съ боковой качкой. Мы легко могли бы привести хоть двадцать интересныхъ примѣровъ, поясняющихъ важность вышеизложеннаго принципа въ инженерномъ дѣлѣ. Теперь студентъ можетъ самъ изучить аналогію этихъ явленій въ электричествѣ и понять, что такое вибраціи Герца.

149. Вибраціи индикатора паровой машины. Карандашъ въ своемъ движеніи долженъ точно записывать давленіе пара на поршень въ каждый моментъ: это значитъ, что естественныя вибраціи прибора должны очень быстро уничтожаться треніемъ. Но всякое треніе, напримѣръ, твердаго тѣла о твердое, служитъ причиной неправильностей. Дѣйствительно легко видѣть, что благодаря такому тренію діаграммы всегда будутъ болѣе вытянутыми, чѣмъ они должны быть. На практикѣ мы находимъ, что, если число естественныхъ періодовъ прибора въ 20 разъ болѣе, чѣмъ машины, то на діаграммѣ получается мало зубцовъ, происходящихъ отъ естественныхъ вибрацій индикатора. Если число естественныхъ періодовъ только въ десять разъ больше, то діаграмма получается такой неровной, что ею нельзя пользоваться.

Число періодовъ массы $\frac{W}{g}$ на концѣ пружины съ упругостью h, см. п. 141, равно $\frac{1}{2\pi}\sqrt{g/Wh}$, если пренебречь треніемъ. Мы разсмотримъ треніе въ п. 160. Каково число періодовъ механизма, подобнаго тому, который имѣется въ индикаторѣ съ упругой пружиной? Отвѣтъ: пусть въ нѣкоторой точкѣ индикаторнаго механизма находится масса $\frac{W}{g}$, и

перемѣщеніе этой точки равно s, въ то время какъ перемѣщеніе конца пружины (въ обыкновенномъ индикаторѣ— поршня) равно 1; представимъ себѣ, что **вмѣсто** $\frac{g}{W}$ **мы имѣемъ массу** $s^2 \frac{g}{W}$ на концѣ пружины. Тогда число періодовъ будетъ $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h\Sigma s^2 w}}$.

Для доказательства возьмемъ случай, показанный на черт. 80; OAB есть невѣсомый рычагъ, вращающійся на шарнирѣ около точки O съ грузомъ W въ точкѣ B. Невѣсомая пружина прикрѣплена къ нему въ A. Когда A перемѣстилось внизъ на разстояніе x отъ положенія равновѣсія, упругая сила въ пружинѣ равна $\frac{x}{h}$. Угловое перемѣщеніе рычага по направленію часовой стрѣлки равно $\frac{x}{OA}$. Моментъ инерціи $\times$ угловое ускореніе численно равенъ моменту силы. Моментъ инерціи есть $\frac{W}{g}OB^2$. Угловое ускореніе равно $\frac{\ddot{x}}{OA}$, гдѣ $\ddot{x}$ означаетъ $\frac{d^2x}{dt^2}$ такъ что



Черт. 80.

$$\frac{W}{g}OB^2 . \frac{\ddot{x}}{OA} + \frac{x}{h} . OA = 0,$$

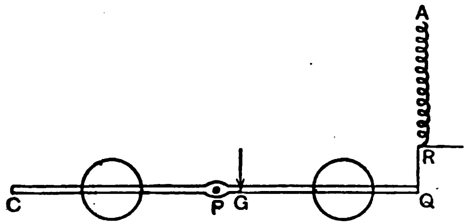
или

$$\ddot{x} + \frac{OA^2}{OB^2} \cdot \frac{g}{Wh} \cdot x = 0.$$

$\frac{OB}{OA}$ есть то, что мы назвали s, такъ что вмѣсто прежняго W, когда W было непосредственно подвѣшено къ пружинѣ, нужно взять $s^2 W$.

150. Указатель вибрацій. Черт. 81 показываетъ приборъ, которымъ пользуются для записи быстрыхъ вертикальныхъ колебаній земли.

Масса CPQ опирается въ точкѣ P—на остріе ножа или на колеса тренія. Центръ тяжести G находится на одной горизонтальной линіи съ P и Q. Пусть $PG = a$, $GQ = b$, $PQ = a + b = l$. Вертикальная пружина AR и нить RQ поддерживаютъ тѣло въ точкѣ Q. Въ данномъ случаѣ AR есть пружина Айртонъ—Перри, которая при помощи вращающагося указателя R, показываетъ относительное положеніе A и Q. Пренебрежемъ ея инерціей и будемъ пред-



Черт. 81.

полагать, что указатель вполнѣ точно указываетъ относительное положеніе A и Q. Можно было бы сократить трудъ, если разсматривать только избытокъ силъ, дѣйствующихъ въ точкахъ P и Q, въ сравненіи съ положеніемь равновѣсія, но, ради ясности, мы разсмотримъ всѣ силы.

Когда тѣло совершаетъ движеніе параллельно плоскости бумаги, то мы можемъ написать уравненіе, выражающее, что **равнодѣйствующая сила равна (численно) массѣ, умноженной на линейное ускореніе центра тяжести въ направленіи равнодѣйствующей.** Мы можетъ написать и другое уравненіе на основаніи того, что **равнодѣйствующій моментъ силъ вокругъ оси, перпендикулярной къ плоскости бумаги и проходящей черезъ центръ тяжести, равенъ угловому ускоренію, умноженному на моментъ инерціи вокругъ оси, проходящей черезъ центръ тяжести.** Я буду пользоваться буквами x, $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ для обозначенія перемѣщенія, скорости и ускоренія или $x, \frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Пусть P и A перемѣстились внизъ на x_1. Пусть Q опустилось на высоту x_1 и положимъ, что упругая сила натяженія пружины равна $Q=Q_0+c\,(x-x_1)$, гдѣ c извѣстное постоянное число (c есть величина обратная h въ п. 141). Пусть W вѣсъ тѣла. Тогда, если P_0 и Q_0 направленныя вверхъ силы въ точкахъ P и Q въ положеніи равновѣсія, то

$$Q_0\,(a+b)=Wa \text{ и } P_0+Q_0=W.$$

Отсюда
$$P_0=\frac{bW}{a+b},\ Q_0=\frac{aW}{a+b}\ \ldots\ldots\ (1),$$
$$Q=Q_0+c\,(x-x_1).$$

Но G перемѣстилось внизъ на $\frac{b}{a+b}x_1+\frac{a}{a+b}x$,

такъ что $W-P-Q=\frac{W}{g}\left\{b\ddot{x}_1+a\ddot{x}\right\}\frac{1}{a+b}\ \ldots\ldots\ (2).$

Угловое перемѣщеніе тѣла θ вокругъ центра тяжести по направленію стрѣлки часовъ будетъ $\frac{x-x_1}{a+b}$. Такъ что, если I его моментъ инерціи вокругъ G, то

$$-Qb+Pa=\frac{I}{a+b}\,(\ddot{x}-\ddot{x}_1)\ \ldots\ldots\ (3).$$

Отсюда, если вмѣсто $\frac{W}{g}$ подставить M, и если $I=Mk^2$, гдѣ k радіусъ инерціи вокругъ G, то (2) и (3) дадутъ намъ

$$\frac{\ddot{x}}{a+b}\left(\frac{I}{a}+aM\right)+xc\left(\frac{b}{a}+1\right)=$$
$$=\frac{\ddot{x}_1}{a+b}\left(\frac{I}{a}-bM\right)+x_1c\left(\frac{b}{a}+1\right)\ \ldots\ (4).$$

Если k—радіусъ инерціи вокругъ P, то мы найдемъ, что (4) приметъ болѣе простой видъ

$$\ddot{x}+n^2x=e^2\ddot{x}_1+n^2x_1,$$

если черезъ n означимъ $\frac{l}{k_1}\sqrt{\frac{c}{M}}=2\pi\times$ число естествен-

ныхъ періодовъ, а e^2 подставимъ вмѣсто $1-\frac{al}{k_1^2}$. Назовемъ $x-x_1$ буквой y, такъ какъ именно эту величину y можетъ отмѣтить наблюдатель, если ящикъ прибора, комната и самъ наблюдатель, получаетъ движеніе x_1. Тогда, такъ какъ $y=x-x_1$ или $x=y+x_1$,

$$\ddot{y}+\ddot{x}_1+n^2(y+x_1)=e^2\ddot{x}_1+n^2x_1.$$

Такъ что
$$\ddot{y}+n^2y=(e^2-1)\ddot{x}_1 \quad \ldots\ldots (5),$$

или
$$\ddot{y}+n^2y+\frac{al}{k_1^2}\ddot{x}_1=0 \quad \ldots\ldots (6).$$

Пусть $x_1=A\sin qt$.

Мы пренебрегаемъ въ расчетѣ треніемъ для удобства пониманія нашихъ выводовъ, однако мы предполагаемъ, что есть нѣкоторое треніе, достаточное, чтобы уничтожить естественную вибрацію тѣла.

Если предположимъ, что $y=\alpha\sin qt$, то найдемъ, что

$$\alpha=\frac{al}{k_1^2}\frac{q^2}{n^2-q^2}A.$$

Это означаетъ, что видимое движеніе y (оно есть то: которое показываетъ указатель пружины Айртонъ-Перри, можно также устроить зеркало, бросающее лучъ на экранъ) въ $\frac{al}{k_1^2}\frac{q^2}{n^2-q^2}$ разъ болѣе дѣйствительнаго движенія подставки прибора, комнаты и наблюдателя. Если q велико сравнительно съ n, напримѣръ, если q всегда болѣе, чѣмъ въ пять разъ превосходитъ n, то мы можемъ принять, что кажущееся движеніе въ $\frac{al}{k_1^2}$ разъ болѣе дѣйствительнаго движенія и не зависитъ отъ числа періодовъ. Слѣдовательно, **всякое періодическое движеніе** (продолжительность періода котораго, положимъ, составляетъ менѣе $^1/_5$ отъ времени періода прибора) **будетъ точно указываемо.**

Замѣтимъ, что, если $al=k_1^2$, такъ что Q есть то, что называютъ центромъ качанія, Q остается неподвижной или постоянной точкой. Но на практикѣ приборъ обыкновенно устраивается такъ, какъ показано на чертежѣ, и Q ни въ

коемъ случаѣ не можетъ быть постоянной точкой. Приборъ того же рода можетъ быть примѣненъ для наблюденія надъ колебаніями въ направленіи съ востока на западъ, или съ сѣвера на югъ.

151. Всякое уравненіе, содержащее въ себѣ $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$ или какую либо другую производную, называется «**дифференціальнымъ уравненіемъ**». Легко убѣдиться, что дифференціальныя уравненія могутъ выражать законы въ ихъ самомъ общемъ видѣ.

Такъ. если x есть линейное разстояніе и t время, то условіе $\frac{d^3x}{dt^3}=0$ выражаетъ, что $\frac{d^2x}{dt^2}$ (ускореніе) не измѣняется. Это есть самое общее выраженіе равномѣрно ускореннаго движенія. Если мы проинтегрируемъ и получимъ, что $\frac{d^2x}{dt^2}=a$, то мы этимъ устанавливаемъ болѣе опредѣленное положеніе, именно, что постоянное ускореніе равно a. Если мы вновь проинтегрируемъ и получимъ

$$\frac{dx}{dt}=at+b,$$

мы имѣемъ еще большую опредѣленность, такъ какъ вводимъ величину b, означающую скорость при $t=0$.

Если мы еще разъ проинтегрируемъ и получимъ

$$x={}^1/_2at^2+bt+c,$$

то это значитъ, что $x=c$ при $t=0$.

Далѣе, мы убѣдимся въ томъ что многіе изъ весьма важныхъ общихъ законовъ получаютъ простое на видъ выраженіе въ формѣ дифференціальнаго уравненія, и студентъ будетъ обладать большимъ преимуществомъ, если онъ, разсмотрѣвъ такое уравненіе, съумѣетъ перевести его смыслъ на обычный языкъ.

152. Уравненіе такого вида:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^3y}{dx^3}+Q\frac{d^2y}{dx^2}+R\frac{dy}{dx}+Sy=X\ldots(1),$$

если P, Q, R, S и X суть функціи одного только x, или

постоянныя, называется **линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ.**

Большая часть нашихъ изслѣдованій въ инженерныхъ наукахъ, въ механикѣ или въ электротехникѣ приводитъ насъ къ линейнымъ уравненіямъ, въ которыхъ P, Q и т. д. за исключеніемъ X суть постоянныя величины. Таковы, напримѣръ, уравненія (8) и (9) въ п. 146.

Далѣе мы увидимъ, что въ извѣстныхъ случаяхъ мы можемъ найти полное рѣшеніе (1) при $X=0$, т. е. найденное рѣшеніе будетъ заключать въ себѣ всѣ возможныя рѣшенія. Теперь положимъ, что это рѣшеніе будетъ $y=f(x)$. Мы видимъ, что эта функція должна заключать въ себѣ четыре произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ высшая производная въ (1) есть $\frac{d^4y}{dx^4}$. и мы докажемъ, что, если при X не равномъ нулю мы можемъ путемъ угадыванія притти къ одному рѣшенію, которое мы назовемъ $y=F(x)$, то.

$$y=f(x)+F(x)$$

будетъ рѣшеніемъ (1). Мы узнаемъ въ главѣ III, что это будетъ полное рѣшеніе (1).

Въ остальной части настоящей главы мы будемъ считать P, Q и т. д. постоянными; пусть

$$\frac{d^4y}{dx^4}+A\frac{d^3y}{dx^3}+B\frac{d^2y}{dx^2}+C\frac{dy}{dx}+Ey=X\ldots\ldots(2),$$

гдѣ A, B, C, E суть постоянныя, а X есть функція x.

Мы часто пишимъ (2) въ такой формѣ

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}+A\frac{d^3}{dx^3}+B\frac{d^2}{dx^2}+C\frac{d}{dx}+E\right)y=X\ldots(3).$$

153. Возьмемъ самое простое уравненіе вида (3). Пусть

$$\frac{dy}{dx}-ay=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

очевидно, что (см. п. 97)

$$y=Me^{ax}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

будетъ рѣшеніемъ, причемъ M есть нѣкоторая произвольная постоянная.

154. Теперь возьмемъ $\frac{d^2y}{dx^2} - a^2y = 0$ . . . . (6),

помощью пробъ мы находимъ, что

$$y = Me^{ax} + Ne^{ax} \quad . . . . (7),$$

есть рѣшеніе, при чемъ M и N суть произвольныя постоянныя.

Но, если мы возьмемъ $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$ . . . . (8),

то мы видимъ, что, такъ какъ a въ (6) соотвѣтствуетъ ni въ (8), если i означаетъ $\sqrt{-1}$, то

$$y = Me^{nix} + Ne^{-nix} \quad . . . . (9)$$

будетъ рѣшеніемъ (8). Если мы провѣримъ, вѣрно ли это, помощью дифференцированія, считая i реальной величиной и конечно полагая $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, и т. д., мы убѣдимся, что это такъ. Но какое значеніе мы можемъ придавать такому отвѣту какъ (9)? Сдѣлавъ пробы, а также вспомнивъ любопытныя аналогіи, описанныя въ п. 106, мы найдемъ, что это есть полное рѣшеніе и, что такимъ же полнымъ рѣшеніемъ будетъ

$$y = M_1 \sin nx + N_1 \cos nx \quad . . . . . (10).$$

Такъ какъ (9) и (10) оба представляютъ полныя рѣшенія (п. 152), ибо они оба содержатъ по двѣ произвольныхъ постоянныхъ, которыя могутъ быть мнимыми или нѣтъ, мы отсюда выводимъ, что выраженія (9) и (10) тождественны и для студента будетъ прекрасное упражненіе, если онъ выраженіе (10) постарается привести къ виду (9), пользуясь формулами для $\sin ax$ и $\cos ax$ п. 106, и вспомнивъ, что произвольныя постоянныя могутъ быть и дѣйствительными. Кромѣ того, важно для инженера умѣть обращаться на практикѣ съ величинами, которыя математики называютъ мнимыми.

155. Возвращаясь къ болѣе общему виду (3), когда **X=0**, мы попробуемъ, не будетъ ли рѣшеніемъ $y = Me^{mx}$, и видимъ, что это будетъ въ томъ случаѣ, если

$$m^4 + Am^3 + Bm^2 + Cm + E = 0. \quad . . . . . . (1).$$

Такое уравненіе называется обыкновенно **вспомога-**

тельнымъ, найдемъ его четыре корня, т. е. четыре значенія m, которыя будутъ удовлетворять ему, и называемъ ихъ m_1, m_2, m_3, m_4; тогда получимъ

$$y = M_1 e^{m_1 x} + M_2 e^{m_2 x} + M_3 e^{m_3 x} + M_4 e^{m_4 x}$$

полное рѣшеніе (3) при $X=O$; причемъ M, и т. д. суть произвольныя постоянныя

156. Такъ, рѣшимъ уравненіе

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 5\frac{d^3 x}{dy^3} + 5\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 6y = 0;$$

если предположимъ, что $y = e^{mx}$, то найдемъ, что m должно удовлетворять уравненію

$$m^4 + 5m^3 + 5m^2 - 5m - 6 = 0.$$

Пробами мы находимъ одинъ изъ корней $m = 1$; раздѣливъ лѣвую часть на $(m - 1)$ и снова пробуя, находимъ что $m = -1$. — есть второй корень; опять дѣлимъ на $m + 1$ и тогда получаемъ многочленъ второй степени, для котораго быстро находимъ остальные корни $m = -2$ и $m = -3$. Отсюда

$$y = M_1 e^{x} + M_2 e^{-x} + M_3 e^{-2x} + M_4 e^{-3x}$$

будетъ полнымъ рѣшеніемъ; M_1, M_2, и т. д. суть произвольныя постоянныя.

157. Уравненіе подобное (1) можетъ имѣть и мнимый корень вида $m + n\iota$, гдѣ i написано вмѣсто $\sqrt{-1}$, но мы изъ алгебры знаемъ, что такіе мнимые корни бываютъ попарно: если есть одинъ вида $m + ni$, то есть и другой видъ $m - ni$. Соотвѣтственныя рѣшенія для y будутъ

$$y = M_1 e^{(m-ni)\,x} + N_1 e^{(m+ni)\,x},$$

или
$$\varepsilon^{mx}\,(M_1 e^{-nix} + N_1 e^{+nix}),$$

но на основаніи (10) это можетъ быть написано такъ

$$y = e^{mx}\,(M \sin\, nx + N \cos\, nx),$$

дѣ M и N суть нѣкоторыя произвольныя постоянныя.

158. Предположимъ, что два корня m вспомогательнаго уравненія случайно равны; обыкновенно не пишутъ

$$y = M_1 e^{mx} + M_2 e^{mx},$$

такъ какъ это было бы равно $(M_1 + M_2)\, e^{mx}$ или Me^{mx}, гдѣ M есть произвольная постоянная, между тѣмъ общее рѣшеніе должно заключать двѣ произвольныя постоянныя.

Въ этомъ случаѣ мы употребляемъ искусственный пріемъ: мы дѣлаемъ предположеніе, что корни суть m и $m+h$, гдѣ h безконечно убывающее:

$$y = M_1 e^{mx} + M_2 e^{(m+h)x}$$
$$= e^{mx}(M_1 + M_2\, e^{hx})$$

но по *п.* 97, $e^{hx} = 1 + hx + \frac{h^2x^2}{1.2} + \frac{h^3x^3}{1.2.3.} + \ldots$

отсюда $y = e^{mx}\left(M_1 + M_2 + M_2\, hx + M_2\, \frac{h^2\, x^2}{2.} \ldots \right)$

Назовемъ M_2h—N и представимъ себѣ, что h становится все меньше, а M_2 все больше, такъ что M_2h можетъ быть какой угодно величиной, положимъ N, кромѣ того

$$M_1 + M_2 = M;$$

такъ какъ h безконечно убываетъ, то мы найдемъ

$$y = e^{mx}\ (M + Nx).$$

Если это разсужденіе не удовлетворитъ читателя, то онъ долженъ помнить, что мы всегда можемъ провѣрить нашъ результатъ и всегда найдемъ, что онъ вѣренъ.

159. Подобнымъ путемъ мы приходимъ къ слѣдующему общему правилу рѣшенія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами. Пусть будетъ уравненіе

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + G\,\frac{dy}{dx} + Hy = 0 \ldots (1).$$

Составляемъ вспомогательное уравненіе

$$m^n + Am^{n-1} + Bm^{n-2} + \ldots Gm + H = 0.$$

Полное значеніе y можетъ быть выражено рядомъ членовъ: каждому дѣйствительному значенію m, положимъ α_1,

будетъ соотвѣтствовать членъ $M_1 e^{a_1 x}$; каждой парѣ мнимыхъ значеній $\alpha_2 \pm \beta_2 i$—членъ

$$e^{\alpha_2 x}(M_2 \sin \beta_2 x + N_2 \cos \beta_2 x);$$

причемъ коэффиціенты M_1, M_2, N_2 суть произвольныя постоянныя, если соотвѣтствующій корень повторяется однажды, многочлены $(r-1)$ степени съ произвольными постоянными коэффиціентами, если корень повторяется r разъ.

Упражненіе $$\frac{d^5y}{dx^5} + 12\frac{d^4y}{dx^4} + 66\frac{d^3y}{dx^3} + 206\frac{d^2y}{dx^2} + 345\frac{dy}{dx} + 234y = 0.$$

Составивъ вспомогательное уравненіе, путемъ пробъ получимъ слѣдующіе пять корней

$$-3, -3, -2, -2+3i, -2-3i.$$

Слѣдовательно, отвѣтъ будетъ

$$y = (M_1 + N_1 x)e^{-3x} + M_2 e^{-2x} + e^{-2x}(M_3 \sin 3x + N_3 \cos 3x)$$

Упражненіе 1. Проинтегрировать $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$

Отвѣтъ: $y = Ae^{3x} + Be^{x}.$

2. Проинтегрировать $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 34y = 0.$

Отвѣтъ: $y = e^{5x}\{A \sin 3x + B\cos 3x\}.$

3. Проинтегрировать $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$

Отвѣтъ: $y = (A + Bx)e^{-3x}$

4. Проинтегрировать

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 12\frac{d^3y}{dx^3} + 62\frac{d^2y}{dx^2} - 156\frac{dy}{dx} + 169y + 0.$$

Здѣсь $m^4 - 12m^3 + 62m^2 - 156m + 169 = 0$, и легко видѣть, что это есть полный квадратъ. Корни вспомогательнаго уравненія суть

$$3+2i, 3+2i, 3-2i, 3-2i.$$

Отсюда рѣшеніе будетъ

$$y = e^{3x}\{(A_1 + B_1 x)\sin 2x + (A_2 + B_2 x)\cos 2x\}.$$

Теперь мы разсмотримъ примѣръ, имѣющій важное значеніе въ физикѣ.

Естественныя вибраціи. Примѣръ.

160. Въ п. 146 мы имѣли **механическую** систему, вибрирующую съ одной степенью свободы, и мы видѣли, что эти вибраціи аналогичны съ колебаніями, происходящими въ **электрической** системѣ, состоящей изъ конденсатора и обмотки съ сопротивленіемъ и самоиндукціей. Мы пренебрегали треніемъ въ механической и сопротивленіемъ въ электрической системѣ. Теперь мы займемся изученіемъ ихъ естественныхъ вибрацій, и, какъ и раньше выберемъ механическую задачу. Если тяжесть въ W фунтовъ, подвѣшенная къ концу пружины, которая при силѣ $x:h$ фунтовъ удлиняется на x футъ, въ своемъ движеніи встрѣчаетъ сопротивленіе отъ силы тренія, равной $b \times$ скорость, то въ п. 146 мы имѣли уравненіе (8) или

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\frac{x}{h}=0,$$

или
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{bg}{W}\frac{dx}{dt}+\frac{xg}{Wh}=0. \qquad \qquad (1)$$

Обозначимъ $\frac{bg}{W}$ черезъ $2f$ и пусть $\frac{g}{Wh}=n^2$; (1) приметъ видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2f.\frac{dx}{dt}+n^2x=0. \qquad \qquad (2).$$

Составивъ вспомогательное уравненіе, мы найдемъ, что корни его будутъ

$$m=-f\pm\sqrt{f^2-n^2}.$$

Въ зависимости отъ величины f и n, мы получимъ различные виды рѣшеній. Чтобы вычислить произвольныя постоянныя, мы должны имѣть достаточно свѣдѣній относительно движенія. Я предполагаю, что когда $t=0$, тѣло находится при $x=0$ и движеніе его совершается со скоростью v_0.

I. Пусть f болѣе n, корни будутъ $-\alpha$ и $-\beta$.

II. Пусть $f=n$ и корни будутъ $-f$ и $-f$.

III. Пусть $f<n$, и корни будутъ $-a\pm bi$.

IV. Пусть $f=0$, и корни будутъ $\pm ni$.

Тогда, согласно правилу п. 159,
Въ I случаѣ нашъ отвѣтъ будетъ

$$x = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t},$$

и, разъ мы сказали, что $x = 0$ при $t = 0$, и $\frac{dx}{dt} = v_0$ при $t = 0$, то мы можемъ вычислить A и B и такимъ образомъ найти x точно въ зависимости отъ t.

Во II случаѣ нашъ отвѣтъ

$$x = (A + Bt)\, e^{-ft};$$

Въ III случаѣ отвѣтъ будетъ

$$x = e^{-at}\,(A \sin bt + B \cos bt);$$

Въ IV случаѣ нашъ отвѣтъ будетъ

$$x = A \sin nt + B \cos nt.$$

161. Мы предпочтемъ взять численный примѣръ и увѣряемъ студента, что ему не слѣдутъ роптать на то, что тратится время на него и на другія подобныя вещи. Пусть $n = 3$, и будемъ брать различныя значенія для f. Для удобства сравненія во всѣхъ случаяхъ будемъ предполагать, что $x = 0$ при $t = 0$ и $\frac{dx}{dt} = 20$ футъ въ секунду, когда $t = 0$.

Случай IV. Пусти $f = 0$, тогда $x = A \sin nt + B \cos nt$,

$0 = A \times 0 + B \times 1$, слѣдовательно $B = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = nA \operatorname{soc} nt - nB \sin nt.$$

$20 = 3A$, такъ что $A = {}^{20}/_{3}$.

Такимъ образомъ нанесемъ на чертежѣ $x = 6.667 \sin 3t$. Это уравненіе изображается кривой 4, черт. 82. Это конечно обыкновенная синусоида: не ослабленное простое гармоническое движеніе.

Случай III. $f = 0.3$. Вспомогательное уравненіе даетъ

$$m = -0.3 \pm \sqrt{0{\cdot}09 - 9} = -0{,}3 \pm 2.985i.$$

Отсюда въ уравненіи $x = e^{-at}\,(A \sin bt + B \cos bt)$ . . (1). $a = 0.3$ и $b = 2.985$.

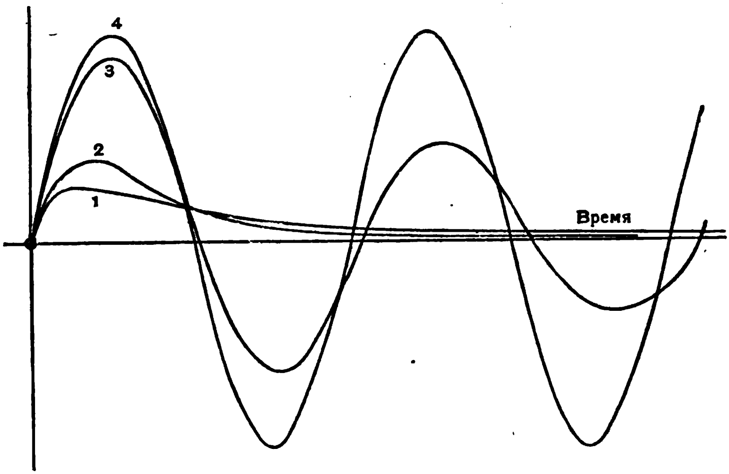
Вы можете не съумѣть продифференцировать произведеніе, хотя мы и дали правило для этого въ п. 90. Мы даемъ нѣсколько упражненій въ главѣ III, а здѣсь мы согласимся, что $\frac{dx}{dt} = -ae^{-at}(A\sin bt - B\cos bt)$

$$+be^{-at}(A\cos bt - B\sin bt) \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Положимъ $x=0$ при $t=0$ и $\frac{dx}{dt}=20$ при $t=0$. Тогда изъ (1) $B=0$ и

$$20 = bA \quad \text{или} \quad A = \frac{20}{b} = \frac{20}{2.985} = 6.7.$$

и отсюда $\qquad x = 6.7e^{-0,3t}\sin 2.985t.$



Черт. 82.

Это уравненіе изображено кривой 3 на черт. 82. Замѣтимъ, что вслѣдствіе тренія періодъ измѣнился.

Случай II. Пусть $f=3$. Корни вспомогательнаго уравненія будутъ $m = -3$ и -3 — равные. Отсюда

$$x = (A+Bt)e^{-3t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Здѣсь опять намъ нужно дифференцировать произведеніе

$$\frac{dx}{dt} = Be^{-3t} - 3\,(A + Bt)\,e^{-3t} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Вводя $x = 0$ при $t = 0$ и $\frac{dx}{dt} = 20$ при $t = 0$, получимъ

изъ (1) $A = 0$ и изъ (2) $B = 20$.

Отсюда $$x = 20t.\ e^{-3t}$$

Это изображается на черт 82 кривой 2.

Случай I. Пусть $l = 5$. Корни вспомогательнаго уравненія будутъ -9 и -1,

$$x = Ae^{-9t} + Be^{-t},$$

$$\frac{dx}{dt} = -9Ae^{-9t} - Be^{-t}.$$

Вводя начальныя условія, получимъ

$$0 = A + B,\ 20 = -9A - B.$$

отсюда $$A = -2^1/_2,\ B = 2^1/_2.$$

$$x = 2^1/_2\,(e^{-t} - e^{-9t}).$$

Это уравненіе представлено на черт. 82 кривой 1.

Студенты могутъ взять начальныя условія

$$x = 10 \text{ при } t = 0 \text{ и } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Это представляетъ случай тѣла, начинающаго движеніе въ моментъ $t = 0$, или, въ случаѣ электрической системы, заряженнаго конденсатора, который начинаетъ разряжаться въ моментъ $t = 0$.

Замѣтимъ, что если продифференцировать (1) п. 160, то мы получимъ, $\left(\text{обозначая } \frac{dx}{dt} \text{ черезъ } v\right)$,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{bg}{W}\,\frac{dv}{dt} + \frac{g}{Wh}\,.\ v = 0.$$

Мы имѣемъ такимъ образомъ точно такой же законъ для скорости и ускоренія, какъ и для самого x.

Также и въ случаѣ электрической системы, такъ какъ $K\frac{dv}{dt}$ означаетъ силу тока, то, если мы продифференцируемъ, то найдемъ, что одинъ и тотъ же законъ существуетъ для тока и для электродвижущей силы. Конечно благодаря начальнымъ условіямъ получатся разныя рѣшенія этихъ уравненій.

162. Если правая часть линейнаго дифференціальнаго уравненія подобнаго (2) п. 152 будетъ не нуль и наше рѣшеніе должно представить, какъ форсированное движеніе системы, такъ и естественныя вибраціи полезно предварительно взглянуть на задачу съ такой точки зрѣнія, которая будетъ ясна изъ слѣдующаго простого примѣра.

Нужно рѣшить уравненіе (11) п. 148:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=n^2a\sin qt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

уравненіе движенія системы съ одной степенью свободы и безъ тренія.

Дифференцируя дважды, находимъ

$$\frac{d^4x}{dt^4}+n^2\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2q^2a\sin qt.$$

Отсюда на основаніи (1) $\frac{d^4x}{dt^4}+(n^2+q^2)\frac{d^2x}{dt^2}+q^2n^2x=0.$. (2).

Вспомогательное уравненіе для (2) будетъ

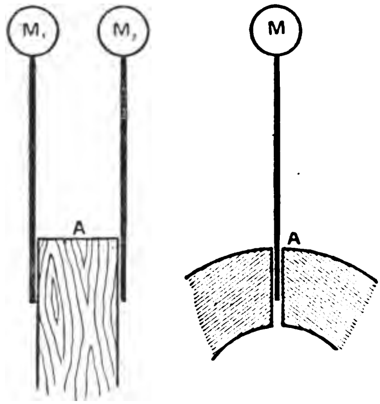
$$m^4+(n^2+q^2)m^2+q^2n^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и мы знаемъ, что два корня будутъ $\pm ni$ и другіе два $\pm qi$. Отсюда имѣемъ полное рѣшеніе

$$x=A\sin nt+B\cos nt+C\sin qt+D\cos qt. \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Дифференцируя (1), мы дали возможность явиться двумъ лишнимъ произвольнымъ постояннымъ C и D и очевидно, что подставивъ (4) въ основное уравненіе, мы получимъ опредѣленныя величины для C и D, такъ какъ въ дѣйствительности онѣ не произвольны. Легко замѣтить, что дифференцируя (1) и получая (2), **мы дѣлаемъ систему болѣе сложной**, даемъ ей другую степень свободы, или лучше сказать, дѣлаемъ ее частью бо̀льшей системы, естественныя вибраціи которой представлены уравненіемъ (4). Когда мы

заставляемъ нѣкоторую массу вибрировать на концѣ пружины, нужно помнить, что центръ тяжести этой массы, подставки, на которой она укрѣплена, и комнаты, остается неизмѣннымъ. Поэтому въ подставкѣ также происходятъ вибраціи, порождающія треніе, которое заставляетъ вибраціи утихать. Если тутъ же находится другая вибрирующая масса, то этотъ эффектъ ослабляется. Напримѣръ, если на черт. 83 M вибрируетъ на концѣ полосы MA, защемленной тисками A, то всякое движеніе M направо должно сопровождаться движеніемъ A и подставки налѣво. Но если у насъ есть двѣ массы, (какъ въ камертонѣ), движущіяся въ каждый моментъ по противуположнымъ направленіямъ, то нѣтъ надобности въ движеніи подставки, и слѣдовательно система M_1M_2 вибрируетъ такъ, какъ бы тренія не существовало, и на этомъ принципѣ основано устройство камертона. Если движеніе началось иначе, чѣмъ въ вышеприведенномъ случаѣ, оно быстро становится такимъ, такъ какъ **нѣкоторая часть движенія, которая нуждается въ движеніи центра тяжести подставокъ, очень быстро ослабляется и исчезаетъ.** Строители паровыхъ машинъ и тѣ лица, которыя пользуются ими въ городахъ, гдѣ запрещено распространеніе колебаній въ землѣ, знаютъ, что всѣ эти обстоятельства слѣдуетъ принимать во вниманіе.



Черт. 83.

163. Если y есть функція x, то уравненіе (3). п. 152 показываетъ намъ, какую сложную операцію надъ ней надо произвести. Иногда употребляется такой символъ

$$(\theta^4 + A\theta^3 + B\theta^2 + C\theta + E)\,y = X,$$

который означаетъ то же самое; θy значитъ, что мы дифференцируемъ y по x, $\theta^2 y$ означаетъ, что мы дифференцируемъ y дважды и т. д.

Легко понять, что θ, θ^2 и т. д. суть только **символы дѣйствія**. Едва ли нужно говорить, что $\theta^2 y$ не значитъ, что берется какое то количество θ, возводится въ квадратъ и умножается на y; это просто удобный способъ выраженія того, что y должно быть дважды продифференцировано. $\theta\theta y$ будетъ означать то же самое. Что будетъ выражать по этой системѣ $(\theta + a)y$? Оно означаетъ $\frac{dy}{dx} + ay$. Что значитъ $(\theta^2 + A\theta + B)y$? — Оно означаетъ $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By$. $(\theta + a)y$ требуетъ, чтобы продифференцировали y и прибавили къ этому a разъ по y, и хотя a есть простой множитель, а θ не есть множитель, однако мы видимъ, что $(\theta + a)y = \theta y + ay$.

Дѣйствительно, мы находимъ, что θ входитъ въ эти условныя выраженія, какъ алгебраическая величина, хотя этого и нѣтъ на самомъ дѣлѣ.

Если u и v суть функціи x, то мы знаемъ, что

$$\theta(u + v) = \theta u + \theta v.$$

Это выражаетъ такъ называемый **распредѣлительный законъ**.

Точно также, если a постоянное число, то $\theta au = a\theta u$, или дѣйствіе θa эквивалентно дѣйствію $a\theta$. Это выражаетъ такъ называемый **перемѣстительный законъ**.

Въ свою очередь $\theta^n\theta^m = \theta^{m+n}$; это есть **законъ показателей**. Если эти три закона принимаются за основные, то мы имѣемъ право вводить θ въ обыкновенныя алгебраическія выраженія, принимая его за обыкновенное количество.

θ подчиняется всѣмъ этимъ законамъ при сочетаніи съ постоянными величинами; но замѣтьте, что, если u и v суть функціи x, $v\theta u$ означающее $v\frac{du}{dx}$, совершенно отлично отъ $\theta . uv$. Если мы будемъ внимательно относиться къ этимъ дѣйствіямъ, то навѣрно не будемъ дѣлать ошибокъ.

Произведемъ дѣйствіе $\theta + b$ надъ $(\theta + a)y$. Но,

$$(\theta + a)y = \theta y + ay \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} + ay.$$

Произвести дѣйствіе $\theta + b$ значитъ: «продифференцировать (это дастъ намъ $\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx}$) и прибавить b разъ по $\frac{dy}{dx} + ay$». Слѣдовательно это дастъ намъ $\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + b\,\frac{dy}{dx} + aby$ или $\frac{d^2y}{dx^2} + (a+b)\,\frac{dy}{dx} + aby$ или

$$[\theta^2 + (a+b)\,\theta + ab]\,y.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что двойная операція

$$(\theta + b)\,(\theta + a)$$

даетъ тотъ же результатъ, что и

$$[\theta^2 + (a+b)\,\theta + ab].$$

Подоб ымъ способомъ и другими путями легко показать, что, хотя θ есть символъ дѣйствія, а не количество, однако оно входитъ въ комбинаціи такъ, какъ будто оно есть алгебраическая величина, до тѣхъ поръ, пока всѣ величины a, b и т. д. суть постоянныя. Замѣтимъ также, что

$$(\theta + a)\,(\theta + b)$$

есть то же самое, что и $(\theta + b)\,\theta + a)$

Студентъ долженъ на практикѣ убѣдиться, что это такъ, и долженъ освоиться съ этимъ способомъ обозначенія. Онъ увидитъ, что это избавляетъ отъ массы непроизводительнаго труда. Такъ, сравните такія выраженія

$$(a\theta + b)\,(\alpha\theta + \beta)\,y$$

съ
$$[a\alpha\theta^2 + (a\beta + \alpha b)\,\theta + b\beta]\,y,$$

или
$$a\alpha\,\frac{d^2y}{dx^2} + (a\beta + \alpha b)\,\frac{dy}{dx} + b\beta y.$$

164. Положимъ, что Dy употреблено, какъ символъ какого либо замысловатаго дѣйствія, которое должно быть совершено надъ y, и мы говоримъ, что $Dy = X$; не значитъ ли это, что, если только мы съумѣемъ сдѣлать обратное дѣйствіе и обозначимъ это обратное дѣйствіе D^{-1} или $\frac{1}{D}$ то. $y = D^{-1}\,X$ или $\frac{X}{D}$? Для насъ очевидно, что, если мы совершимъ дѣйствіе D съ $D^{-1}X$, то мы этимъ уничто-

жимъ результатъ дѣйствія D^{-1}. Но, если $\frac{dy}{dx}+ay=X$, или $\left(\frac{d}{dx}+a\right)y=X$, или $(\theta+a)y=X$, то обратное дѣйствіе мы можемъ обозначить

$$y=\left(\frac{d}{dx}+a\right)^{-1}X \text{ или } (\theta+a)^{-1}X \quad \ldots . \; (1),$$

или
$$\frac{X}{\frac{d}{xd}+a} \text{ или } \frac{X}{\theta+a} \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2).$$

Возьмемъ послѣднее изъ выраженій; теперь $\frac{1}{\theta+a}$ есть простой символъ обратнаго дѣйствія, и мы видимъ, что

$$y=\frac{X}{\theta+a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (3).$$

подчиняется обыкновеннымъ правиламъ умноженія, такъ какъ (3) есть то же, что

$$(\theta+a)\,y=X \ldots\ldots\ldots\ldots \; (4).$$

и (4) получается изъ (3), какъ бы умноженіемъ обѣихъ частей уравненія на $(\theta+a)$.

Точно также возьмемъ $\frac{d^2y}{dx^2}+(a+b)\frac{dy}{dx}+aby=X$. . (5),

или
$$[\theta^2+(a+b)\theta+ab]\,y=X \ldots\ldots\ldots \; (6),$$
или
$$(\theta+a)(\theta+b)\,y=X \ldots\ldots\ldots\ldots \; (7).$$

Здѣсь прямое дѣйствіе $(\theta+a)$, совершенное надъ $(\theta+b)\,y$ даетъ намъ X; отсюда по выше указанному опредѣленію

$$(\theta+b)\,y=\frac{X}{\theta+a} \ldots\ldots\ldots\ldots \; (8),$$

повторяя то же самое, мы получимъ

$$y=\frac{1}{(\theta+b)}\left(\frac{X}{\theta+a}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \; (9).$$

Но согласно съ нашимъ методомъ обозначенія обратныхъ дѣйствій, (6) напишется такъ

$$y=\frac{X}{\theta^2+(a+b)\theta+ab} \ldots\ldots\ldots \; (10),$$

таким образомъ и здѣсь мы не видимъ никакого противорѣчія въ томъ, что мы условились обращаться съ выраженіями $(\theta + a)$ и $(\theta + b)$ (9) такъ, какъ будто θ есть алгебраическая величина.

165. Теперь мы знаемъ, что обратное дѣйствіе

$$[\theta^2 + (a+b)\theta + ab]^{-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

можетъ быть выполнено въ два пріема; сначала производимъ дѣйствіе $(\theta + b)^{-1}$ а потомъ $(\theta + a)^{-1}$.

Тутъ является интересный вопросъ. Мы знаемъ, что, еслибы θ было дѣйствительно алгебраической величиной, то

$$\frac{1}{\theta^2 + (a+b)\theta + ab} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{\theta+a} - \frac{1}{\theta+b}\right) \; . \; . \; (2).$$

Важно узнать совершенно ли равносильно дѣйствіе

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\theta+\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{1}}{\theta+\mathbf{b}}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

дѣйствію обратному $\theta^2 + (\mathbf{a}+\mathbf{b})\theta + \mathbf{ab}$? . . . . (4). Мы скажемъ только, что это будетъ вѣрно, если прямое дѣйствіе (4) совершенно уничтожаетъ (3). Присоединимъ (3) къ X и къ результату припишемъ (4); если мы произведемъ дѣйствіе (4) надъ $\frac{1}{\theta+a}X$, очевидно мы получимъ $(\theta + b)X$ или $\frac{dX}{dx} + bX$; если мы произведемъ дѣйствіе (4) надъ $\frac{1}{\theta+b}X$, мы очевидно получимъ $(\theta + a)X$ или $\frac{dX}{dx} + aX$, но

$$\frac{1}{b-a}\left\{\frac{dX}{dx} + bX - \left(\frac{dX}{dx} + aX\right)\right\} = X.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что (3) обратно (4), и что мы имѣемъ право расчленить обратное дѣйствіе представленное лѣвой частью уравненія (2), на отдѣльныя дѣйствія, указанныя правой частью (2) Мы уже имѣли дѣло съ подобными случаями, когда выраженіе, надъ которымъ производилось дѣйствіе равно было 0. Ибо очевидно, что если α_1, α_2, и т. д. суть корни вспомогательнаго уравненія п. 159, то это значить, что

$$\theta^n + A\theta^{n-1} + B\theta^{n-2} + \; . \; . \; . \; . \; . + G\theta + H.$$

можетъ быть разложено на члены $(\theta - \alpha_1)(\theta - \alpha_2)$ и т. д.

Замѣтимъ, что, если $\frac{dy}{dx} = X$ или $\theta y = X$, или $y = \frac{X}{\theta}$ или $y = \theta^{-1} X$, то обратное дѣйствіе θ^{-1} просто означаетъ, что X нужно проинтегрировать. Точно также θ^{-2} означаетъ двойное интегрированіе и т. д. *).

*) Представьте, что въ нашихъ дѣйствіяхъ намъ постоянно приходится встрѣчаться съ символами $\theta^{1/2}$, или $\theta^{-1/2}$, или $\theta^{2/3}$ и т. д.; какое толкованіе мы должны имъ дать? Теперь нѣтъ особенной необходимости разсматривать ихъ. Какое бы толкованіе мы не дали имъ, оно не должно противорѣчить тому, что уже сказано по этому поводу. Напримѣръ $\theta^{3/2}$ есть то же самое, что $\theta\theta^{1/2}$ и $\theta^{-1/2}$ означаетъ то же, что и $\theta^{1/2}\,\theta^{-1}$ или $\theta^{-1}\,\theta^{1/2}$. Мы должны помнить, что всякое подобное дѣйствіе есть интегрированіе, и что мы пользуемся символами для облегченія нахожденія отвѣтовъ; мы пользуемся научнымъ методомъ пробы, и самое лучшее наше свидѣтельство законности этого метода, есть провѣрка на дѣлѣ полученнаго нами отвѣта; это можетъ быть сдѣлано всегда. Большая часть функцій, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло, суть или вида Ae^{ax} или $B\sin bx$ или суммы такихъ функцій. Замѣтимъ, что

$$\theta^n A e^{ax} = A a^n e^{ax},$$

если n есть цѣлое число, положительное или отрицательное. Отсюда видно, что рѣшеніе задачъ было бы значительно облегчено, если бы принять, что

$$\theta^{1/2}\ Ae^{ax} = Aa^{1/2} e^{ax}$$

или что

$$\theta^{1/3}\ Ae^{xa} = Aa^{1/3}\ e^{ax} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Также
$$\theta B \sin bx = Bb \cos bx = Bb \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta^2 B \sin bx = -Bb^2 \sin bx = Bb^2 \sin(bx + \pi),$$

и
$$\theta^n B \sin bx = Bb^n \sin\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

Очевидно, что это остается вѣрнымъ, пока n есть положительное или отрицательное цѣлое число; допустимъ, что это вѣрно и тогда, если n есть положительная и отрицательная дробь, такъ что

$$\theta^{1/2}\ \mathrm{B \sin bx} = \mathrm{Bb}^{1/2} \sin\left(\mathrm{bx} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Есть и другія извѣстныя полезныя функціи, кромѣ e^{ax} и $\sin bx$, надъ которыми, дѣйствіе $\theta^{1/2}$ даетъ результаты, имѣющіе для насъ практическое значеніе. Напримѣръ, положимъ, что мы имѣемъ дѣло съ такой функціей, которая равняется 0 для всѣхъ отрицательныхъ

166. Задачи изъ электричества. Цѣпь съ сопротивленіемъ R и самоиндукціей L.

$$V = RC + L\frac{dC}{dt};$$

обозначимъ $\frac{d}{dt}$ черезъ θ, тогда

$$V = (R + L\theta)\,C \text{ или } C = \frac{V}{R + L\theta}.$$

Дѣйствительно, во всѣхъ нашихъ алгебраическихъ выкладкахъ мы считаемъ $R + L\theta$ какъ бы за сопротивленіе.

Конденсаторъ емкостью K фарадъ. Пусть разность потенціаловъ между обкладками будетъ V вольтъ. Пусть C— сила тока въ амперахъ, направляющагося внутрь конденсатора, иначе говоря, скорость, съ которой возростаетъ Q, зарядъ его въ кулонахъ, отсюда $C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(KV)$, или, такъ какъ K обыкновенно принимается за постоянное, $C = K\frac{dV}{dt}$.

значеній x и равна постоянной величинѣ a для всѣхъ положительныхъ значеній x; легко убѣдиться, что, если такую функцію назовемъ $f(x)$, то

$$\theta^{1/2} f(x) = a\frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

а значенія $\theta^{3/2}$, или $\theta^{5/2}$, или $\theta^{-1/2}$, или $\theta^{-3/2}$ легко могутъ быть получены дифференцированіемъ или интегрированіемъ. Мнемоническое правило для этого, (мы не будемъ приводить здѣсь его доказательства или вывода), будетъ $\theta^n x^m = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-n}} x^{m-n}$.

Пусть $n = 1/2$, $m = 0$, тогда получимъ $\theta^{1/2} x^0 = \frac{1}{\underline{|-1/2}} x^{-1/2}$.

Но $\underline{|-1/2}$ не имѣетъ яснаго значенія. Дадимъ ему нѣкоторое значеніе, предположивъ, что, то, что вѣрно для цѣлыхъ чиселъ, вѣрно и для всякихъ чиселъ и воспользуемся гамма-функціей отъ $1/2$ или $\overline{|1/2}$, которая равна $\sqrt{\pi}$, вмѣсто $\underline{|-1/2}$. Мы можемъ убѣдиться, что рѣшенія, полученныя подобнымъ образомъ, вѣрны.

Проводимость конденсатора есть $K\theta$, такимъ образомъ

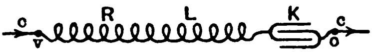
$$C = K.\theta.V = V : \frac{1}{K\theta}.$$

Отсюда, токъ внутрь конденсатора будетъ такой, какъ будто сопротивленіе равно $\frac{1}{K\theta}$.

Цѣпь съ сопротивленіемъ, самоиндукціей и емкостью, черт. 84. Всѣ задачи, касающіяся ея, рѣшаются въ предположеніи, что общее сопротивленіе есть

$$R + L\theta + \frac{1}{K\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

167. Въ любой **сѣти проводниковъ** мы въ точности будемъ знать дѣйствительное сопротивленіе (для постоянныхъ токовъ) между любыми двумя точками A и B, если намъ даны



Черт. 84.

сопротивленія r_1, r_2 и т. д. для всѣхъ вѣтвей. Если каждая изъ этихъ вѣтвей имѣетъ самоиндукцію l_1 и т. д. и емкость K_1 и т. д., то намъ остается только подставить во всѣ математическія выраженія вмѣсто r_1, $r_1 + l_1\theta + \frac{1}{K_1\theta}$ и мы получимъ сопротивленіе для токовъ не постоянныхъ.

Какъ же намъ нужно понимать наши результаты? Какъ бы сложно не было дѣйствіе, мы всегда можемъ привести его послѣ освобожденія отъ знаменателей и т. д. къ слѣдующему болѣе простому виду

$$\frac{a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + e\theta^4 + f\theta^5 + \ldots}{a' + b'\theta + c'\theta^2 + d'\theta^3 + e'\theta^4 + f'\theta^5 + \ldots} \quad \ldots \quad (1),$$

это дѣйствіе должно быть выполнено надъ нѣкоторымъ вольтажемъ, который есть функція времени. Относительно нѣкоторыхъ, изученныхъ нами функцій времени, мы знаемъ, какое рѣшеніе должны мы получить. Такъ, замѣтимъ, что

если мы совершаемъ дѣйствіе $(a+b\theta+\ldots)$ надъ e^{at}, то мы получимъ

$$(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+e\alpha^4+f\alpha^5\ldots)e^{at}\;.\;.\;.\;.\;.\;(2).$$

Слѣдовательно сложное дѣйствіе (1) обращается въ простое умноженіе на A и дѣленіе на A', гдѣ A есть число а A' есть число $a'+b'\alpha+c'\alpha^2+\ldots.$

Точно также, если мы выполняемъ дѣйствіе надъ $m\sin a+b\alpha+c\alpha^2+\ldots,\ (nt+e)$, то должны замѣтить, что

$$\begin{array}{lll} & \theta^2 \text{ дастъ} & -mn^2\sin(nt+e), \\ & \theta^4 \quad » & +mn^3\sin(nt+e), \text{ и т. д.} \\ \text{между тѣмъ} & \theta \text{ дастъ} & mn\cos(nt+e), \\ & \theta^3 \quad » & -mn^3\cos(nt+e), \\ & \theta^5 \quad » & +mn^5\cos(nt+e), \end{array}$$

Отсюда сложное дѣйствіе (1) даетъ тотъ же результатъ, что и $\dfrac{p+q\theta}{\alpha+\beta\theta}$, гдѣ

$$p=a-cn^2+en^4-\ldots.. \qquad q=b-dn^2+fn^4-\ldots.$$
$$\alpha=a'-c'n^2+e'n^4-\ldots. \qquad \beta=b'-d'n^2+f'n^4--\ldots.$$

Замѣтимъ, что (см. п. 118) дѣйствіе $p+q\theta$ надъ $m\sin(nt+e)$ увеличиваетъ амплитуду въ $\sqrt{p^2+q^2n^2}$ разъ и даетъ опереженіе фазы $arctg\,\dfrac{qn}{p}$. Студентъ долженъ самъ провѣрить это, хотя уже онъ получилъ этотъ результатъ другимъ способомъ. Докажите, что

$$(p+q\theta)\sin nt=\sqrt{p_2+q^2n^2}\sin\left(nt+\operatorname{arctg}\frac{qn}{p}\right).$$

Подобнымъ же образомъ, обратное дѣйствіе $\dfrac{1}{\alpha+\beta\theta}$ уменьшитъ амплитуду въ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2n^2}$ разъ и дастъ запаздываніе фазы $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta n}{\alpha}$, а отсюда

$$\frac{p+q\theta}{\alpha+\beta\theta}m\sin(nt+e)$$
$$=m\sqrt{\frac{p^2+q^2n^2}{\alpha^2+\beta^2n^2}}\sin\left(nt+e+\operatorname{arctg}\frac{qn}{p}-\operatorname{arctg}\frac{\beta n}{\alpha}\right),$$

равенство, **имѣющее очень важное значенiе и значительно сокращающее трудъ.**

168. Во всѣхъ предыдущихъ разсужденiяхъ мы имѣли въ виду только **форсированныя вибрацiи** системы. Мы уже указывали на то, что если у насъ есть уравненiе, подобное (1) или (2) п. 152, то рѣшенiе будетъ состоять изъ двухъ частей, положимъ $y=f(x);+F(x)$: гдѣ $f(x)$ есть рѣшенiе при X во (2) равномъ 0, т. е. когда естественное дѣйствiе системы предоставлено самому себѣ, а $F(x)$ форсированное движенiе. Если во (2) мы обозначимъ дѣйствiе.

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}+A\frac{d^3}{dx^3}+B\frac{d^2}{dx^2}+C\frac{d}{dx}+E\right)y \text{ черезъ } Dy,$$

то $D(y)=X$ даетъ намъ

$$y=D^{-1}(0)+D^{-1}(X),$$

гдѣ $D^{-1}(0)$ даетъ $f(x)$, а $D^{-1}(x)$ даетъ $F(x)$.

Такъ, если $\frac{dy}{dx}+ay=0$, или $\left(\frac{d}{dx}-a\right)y=0$ или $(\mathfrak{h}+a)y=0$.

то по п. 97 мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ $y=Ae^{-ax}$.

Отсюда мы видимъ, что $\frac{0}{\mathfrak{h}+a}$ есть не нуль, а Ae^{-ax}.

Такимъ образомъ, если $\frac{dy}{dx}+ay=X$, то полное рѣшенiе будетъ

$$y=Ae^{-ax}+\frac{X}{\mathfrak{h}+a}$$

Мы изучаемъ только послѣднюю часть,—форсированное движенiе. Въ большей части практическихъ инженерныхъ задачъ, показательныя функцiи являются быстро убывающими.

169. Такъ, въ электрической цѣпи, гдѣ $V=(R+L\mathfrak{h})C$ если

$$V=V_0\sin qt,$$

то мы уже нашли форсированное значенiе C,

$$C=\frac{V_0\sin qt}{R+L\mathfrak{h}},$$

и, согласно нашему новому правилу или согласно п. 118, это приметъ видъ

$$C = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2q^2}} \sin\left(qt - \operatorname{arctg}\frac{Lq}{R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Но кромѣ этого члена будетъ другой, равный

$$= \frac{0}{R + L\theta} \text{ или } \frac{0}{\theta + \frac{R}{L}},$$

который согласно вышеизложенному правилу (п. 168) даетъ

$$A_1 e^{-\frac{R}{L}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Или мы его получимъ по п. 97,

$$RC + L\frac{dC}{dt} = 0, \text{ или } \frac{dC}{dt} = -\frac{R}{L}C.$$

Это законъ сложныхъ процентовъ, который даетъ намъ рѣшеніе (2), полное же рѣшеніе выразится суммой (2) и (1). Если намъ извѣстно значеніе C, когда $t = 0$, то мы можемъ найти значеніе постоянной A_1; очевидно, что (2) есть исчезающій членъ.

Теперь, положимъ, **V равно постоянному V_0**

$$C = \frac{V_0}{R + L\theta}.$$

Очевидно, что $C = \frac{V_0}{R}$ будетъ выражать силу форсированнаго тока, ибо если мы выполнимъ дѣйствіе $R + L\theta$ надъ $C = \frac{V_0}{R}$, то получимъ V_0, а исчезающій токъ будетъ всегда одинъ и тотъ же при тѣхъ же R и L, какое бы ни было V, а именно $A_1 e^{-\frac{R}{L}t}$.

Полный отвѣтъ будетъ

$$C = A_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Пусть, напримѣръ, $C = 0$ при $t = 0$, тогда

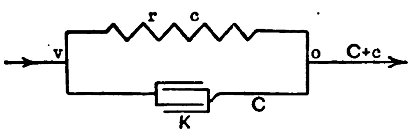
$$0 = A_1 + \frac{V_0}{R} \text{ или } A_1 = -\frac{V_0}{R},$$

и (2) приметъ видъ $C=\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-\frac{L}{R}t}\right)$ . . . . (3).

Студентъ долженъ взять $V_0=100$, $R=1, L=0{,}1$ и показать, какъ будетъ возрастать C. Мы уже имѣли дѣло съ этимъ закономъ раньше.

170. *Примѣръ.* **Конденсаторъ емкостью K и съ сопротивленіемъ r безъ индукціи въ параллельномъ соединеніи;** V вольтажъ между оконечностями соединенія (черт. 85).

Два тока будутъ $c=\frac{V}{r}$ и $C=K\theta V$, ихъ сумма $C+c=$ $=V\left(\frac{1}{r}+K\theta\right)$ или $V\left(\frac{1+rK\theta}{r}\right)$, такъ что при параллельномъ соединеніи она такова, какъ будто общее сопротивленіе равно $\frac{r}{1+rK\theta}$.



Черт. 85.

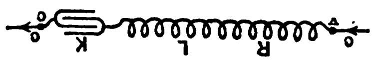
Если $V=V_0\sin nt$, то

$$C+c=\frac{(1+rK\theta)\,V_0\sin nt}{r}\quad\text{и по п. 167,}$$

$$C+c=\frac{V_0}{r}\sqrt{1+r^2K^2n^2}.\sin\left(nt+\operatorname{arctg} rKn\right),$$

$$c=\frac{V_0}{r}\sin nt,\quad C=V_0Kn\sin\left(nt+\frac{\pi}{2}\right).$$

171. Цѣпь съ сопротивленіемъ, самоиндукціей и емкостью



Черт. 86.

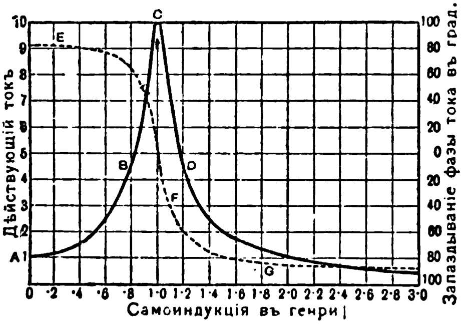
(черт. 86) **имѣетъ перемѣнный вольтажъ** $V=V_0\sin nt$ по концамъ; какова будетъ сила тока?

Отвѣтъ $C = \dfrac{V}{R + L\theta + \dfrac{1}{K\theta}}$ и по п. 167,

$$C = \frac{K.\theta.V}{1 + RK.\theta + LK.\theta^2} = \frac{K\theta}{(1 - LKn^2) + RK\theta} V$$

$$C = \frac{KnV_0}{\sqrt{(1 - LKn^2)^2 + R^2K^2n^2}} \sin\left(nt + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{RKn}{1 - LKn^2}\right).$$

Старательный студентъ возьметъ числа и помощью нѣсколькихъ численныхъ пробъ найдетъ, что это означаетъ. Если онъ хорошо разработаетъ хоть одинъ изъ слѣдующихъ примѣровъ, то онъ убѣдится, что въ его рукахъ есть оружіе, съ которымъ можно рѣшить въ нѣсколько пріемовъ такую задачу, которую иные ученые рѣшаютъ на многихъ страницахъ, пользуясь самыми запутанными математическими выраженіями, физическое значеніе которыхъ очень трудно, или даже совсѣмъ невозможно прослѣдить. Здѣсь же легко понять физическое значеніе каждаго дѣйствія.



Черт. 87.

† *Численное упражненіе.* Беремъ $V_0 = 1414$ вольтъ, $K = 1$ микрофараду или 10^{-6}, $R = 100$ омовъ и $n = 1000$ и находимъ слѣдующіе результаты, происходящіе отъ измѣненія L. Ниже мы даемъ таблицу и кривыя на черт. 87: $ABCD$ показываетъ, какъ медленно вначалѣ возрастаетъ сила тока отъ A, когда $L = 0$ по мѣрѣ возрастанія L; затѣмъ она растетъ быстрѣе, достигая максимума при $L = 1$ генри; затѣмъ опять убываетъ съ такой же точно постепенностью, въ ка-

кой возрастала. *EFG* показываетъ опереженіе фазы, которое при $L = 1$ быстро переходитъ въ запаздываніе. Максимальная сила тока (при $LKn^2 = 1$) есть та самая, которая была бы, если бы не было ни конденсатора, ни самоиндукціи и если бы мы имѣли только простое сопротивленіе R безъ самоиндукціи. Интересно отмѣтить въ электрической аналогіи п. 160, что это равенство $LKn^2 = 1$, есть то отношеніе, которое должно сохраняться между L, K и n (пренебрегая небольшимъ членомъ, выражающимъ сопротивленіе), когда конденсаторъ посылаетъ волнообразные токи черезъ цѣпь R, L, соединяющую его двѣ обкладки.

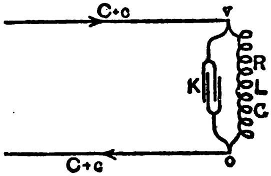
L въ генри	Дѣйствующій токъ въ амперахъ	Опереженіе фазы тока въ градусахъ	L въ генри	Дѣйствующій токъ въ амперахъ	Опереженіе фазы тока въ градусахъ
0	0·995	84·28	1·05	8·944	—26·57
0·1	1·110	83.67	1·1	7·071	—45·0
0·2	1·240	82·87	1·2	4·472	—63·43
0·3	1.414	81·87	1·3	3·162	—71·57
0·4	1·644	80·53	1·4	2·425	—75·97
0·5	1.961	78·67	1·5	1·961	—78·67
0·6	2 425	75·97	1·6	1·644	—80·53
0·7	3·162	71·57	1·7	1·414	– 81·87
0·8	4·472	63·43	1·8	1·240	—82·87
0·9	7·071	45·0	1·9	1·110	—83·67
0·95	8·944	26·57	2·0	0·995	—84·28
0·975	9·701	14·03	2·5	0·665	– 86·18
1·00	10·00	0	3·0	0·499	—87·13
1·025	9·701	—14·03			

Опытъ съ числами, подобный тому, который сдѣланъ въ этомъ примѣрѣ стоитъ гораздо дешевле, да и болѣе доказателенъ при разработкѣ подобной задачи, чѣмъ всякіе опыты съ альтернаторами, обмотками и конденсаторами.

172. Если вторичная цѣпь трансформатора незамкнута, то всетаки энергія можетъ расходоваться на гистерезисъ и паразитные токи, и дѣйствіе будетъ мало отличаться отъ того, которое мы имѣли бы, если бы въ немъ не было такой

внутренней потери, а была бы небольшая нагрузка. Однако положимъ, что нагрузки нѣтъ. **Найдемъ вліяніе конденсатора въ отвѣтвленіи при прохожденіи «лѣниваго тока».**

Токъ, проходящій черезъ ненагруженный трансформаторъ, состоитъ изъ основного члена, того же числа періодовъ, какъ и первичная электродвижущая сила, и изъ другихъ членовъ тройного и пятерного числа періодовъ, возникающихъ любопытнымъ образомъ благодаря присутствію желѣза. Съ этими «посторонними членами» конденсаторъ ничего не можетъ сдѣлать; онъ не можетъ никакъ замаскировать ихъ; общій токъ всегда будетъ заключать ихъ въ себѣ. Мы не будемъ говорить о нихъ, такъ какъ можно мысленно представлять ихъ какъ бы дополнительными токами, и это избавляетъ насъ отъ затрудненій, такъ какъ, если принимается во вниманіе только одинъ основной членъ, мы можемъ считать проницаемость постоянной; то есть, что первичная цѣпь ненагруженнаго конденсатора имѣетъ постоянную самоиндукцію.



Черт. 88.

Дѣйствительно, помѣстимъ между концами обмотки съ сопротивленіемъ R и самоиндукціей L, конденсаторъ емкости K. Пусть вольтажъ между оконечностями будетъ $V = V_0 \sin nt$. Пусть C сила тока, проходящаго въ нѣкоторый моментъ черезъ обмотку, и c сила тока, проходящаго черезъ конденсаторъ, тогда $C + c$ будетъ общая сила тока въ системѣ.

Теперь
$$C = \frac{V_0 \sin nt}{R + L\theta},$$

и
$$c = V_0 \sin nt \div \frac{1}{K\theta} \text{ или } c = KnV_0 \cos nt,$$

$$C + c = \left(\frac{1}{R + L\theta} + K\theta\right) V_0 \sin nt$$
$$= \frac{1 + RK\theta + LK\theta^2}{R + L\theta} V = \frac{1 - LKn^2 + RK.\theta}{R + L\theta} V,$$

по нашему правилу, выведенному въ п. 167.

На основаніи п. 167 мы можемъ легко написать полное значеніе $C+c$, но, такъ какъ мы теперь интересуемся знать величину запаздыванія или опереженія фазы, то мы опредѣлимъ только амплитуду. Она очевидно будетъ

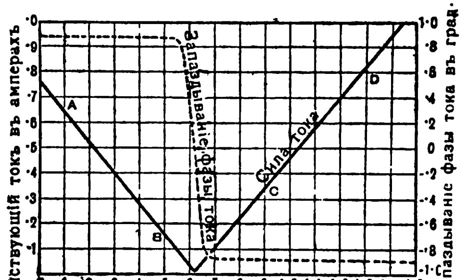
$$V_0\sqrt{\frac{(1-LKn^2)^2+R^2K^2n^2}{R^2+L^2n^2}},$$

и дѣйствующая сила тока $C+c$ (что и покажетъ измѣритель) будетъ равна этой величинѣ, дѣленной на $\sqrt{2}$.

Замѣтимъ, что $C+c$ будетъ наименьшимъ, когда

$$K=\frac{L}{R^2+L^2n^2}$$

Замѣтьте, что если L выражено въ генри, а $n=2\pi\times$ число періодовъ (на практикѣ = около 600), то K будетъ въ фарадахъ. Но конденсаторъ даже съ емкостью въ $^1/_3$ микрофарада или $^1/_3\times10^{-6}$ фарада стоитъ нѣсколько фунтовъ стерлинговъ. Мы однако знали одного непрактичнаго человѣка, который предложилъ примѣнить конденсаторъ, который обошелся бы нѣсколько милліоновъ фунтовъ стерлинговъ.



черт. 89.

Въ данномъ случаѣ дѣйствующая сила тока $C+c$ будетъ въ $R:\sqrt{R^2+L^2n^2}$ разъ болѣе дѣйствующей силы тока C.

Студентъ долженъ взять численный примѣръ. Такъ, въ существующемъ трансформаторѣ Геджхога мы нашли $R=24$ ома, $L=6{\cdot}23$ генри, $n=509$, соотвѣтствующее числу періодовъ около 81·1 въ секунду. Дѣйствующая электродви-

жущая сила или $V_0 : \sqrt{2}$ равна 2400 вольтъ. На черт. 89 мы показываемъ дѣйствующую силу тока, вычисленную для различныхъ значеній K. Кривая тока $ABCD$ есть гипербола, которую трудно отличить отъ двухъ прямыхъ линій за исключеніемъ части ея, лежащей при вершинѣ.

Минимумъ общей силы тока будетъ при $K = \frac{L}{R^2 + L^2 n^2}$, въ данномъ случаѣ равномъ 0.618 микрофарадъ; и вліяніе конденсатора уменьшаетъ общую силу тока въ отношеніи равномъ отношенію сопротивленія къ кажущемуся сопротивленію. Интересно прослѣдить на этой кривой, какъ быстро большое запаздываніе фазы измѣняется на большое опереженіе.

173. Если токи постоянны, и если точки A и B соединены между собою параллельными сопротивленіями r_1, r_2, r_3, если V есть вольтажъ между A и B, и если назовемъ силы трехъ токовъ c_1, c_2, c_3, а силу общаго тока C, то

$$c_1 = \frac{V}{r_1}, \quad c_2 = \frac{V}{r_2}, \quad c_3 = \frac{V}{r_3},$$

$$C = V\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

Итакъ три параллельные проводника дѣйствуютъ такъ, какъ будто ихъ общая проводимость равна

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

Если C извѣстно, то

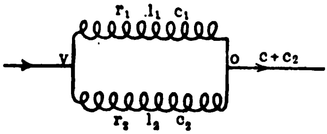
$$c_1 = \frac{C}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) r_1}.$$

Теперь, пусть въ каждой вѣтви будетъ самоиндукція l и конденсаторъ емкости k, и мы получимъ точно такія же формулы, если вмѣсто величины r подставимъ

$$r + l\theta + \frac{1}{k\theta}.$$

Алгебраическія выраженія здѣсь очень сложны и потому лучше всего взять численные примѣры.

174. Двѣ цѣпи въ параллельномъ соединеніи. Онѣ имѣютъ сопротивленіе r_1 и r_2 и самоиндукцію l_1 и l_2 какъ распредѣлится токъ C между ними?



Черт. 90.

Если бы токъ былъ постояненъ, то (черт. 90) въ вѣтви r_1 токъ c_1 будетъ

$$c_1 = \frac{r_2}{r^1 + r_2} C.$$

Слѣвовательно въ данномъ случаѣ $c_1 = \dfrac{r_2 + l_2 \theta}{r_1 + r_2 + (l_1 + l_2)\theta} C.$

Если $C = C_0 \sin nt$, то по п. 167

$$c_1 = C_0 \sqrt{\frac{r_2^2 + l_2^2 n^2}{(r_1 + r_2)^2 + (l_1 + l_2)^2 n^2}}$$

$$\sin\left(nt + \operatorname{arctg}\frac{l_2 n}{r_2} - \operatorname{arctg}\frac{(l_1 + l_2)\, n}{r_1 + r_2}\right).$$

Положимъ, что въ этомъ случаѣ мы **желаемъ воспользоваться, для нѣкоторой практической цѣли частью С въ одномъ изъ отвѣтвленій, но съ нѣкоторымъ опереженіемъ фазы.**

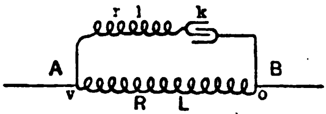
Мы устраиваемъ такъ, чтобы $\operatorname{arctg}\dfrac{l_2 n}{r_2} - \operatorname{arctg}\dfrac{(l_1 + l_2)\, n}{r_1 + r_2}$ было бы равно требуемому опереженію, и пользуемся для нашей цѣли токомъ въ вѣтви r_1

175. Конденсаторъ, уничтожающій вліяніе самоиндукціи. Положимъ, что **вольтажъ** между точками A и B **слѣдуетъ какому либо закону**, и мы желаемъ, чтобы сила тока, входящаго у A и выходящаго у B, въ точности была равна $\dfrac{V}{R}$, какое бы V ни было, и, положимъ, мы имѣемъ между A и B обмотку съ сопротивленіемъ R и самоиндукціей L, — покажемъ, какъ устроить отвѣтленіе съ конденсаторомъ, чтобы достичь нашей цѣли.

Соединимъ A и B цѣпью, включающей въ себѣ сопротивленіе r, самоиндукцію l и конденсаторъ емкостью K (см. черт. 91).

Полная сила тока будетъ очевидно

$$\frac{V}{R+L\theta}+\frac{V}{r+l\theta+\frac{1}{K\theta}};$$



Черт. 91.

приводя къ одному знаменателю и располагая почленно, получимъ

$$\frac{1+\theta(rK+RK)+\theta^2(lK+LK)}{R+\theta(RrK+L)+\theta^2(RlK+LrK)+LlK\theta^3}V.$$

Замѣтимъ. что, такъ какъ V можетъ быть какой угодно функціей времени, то мы не можемъ упростить этого выраженія подобно тому, какъ это дѣлали въ п. 167. Теперь мы хотимъ, чтобы результатъ дѣйствія былъ равенъ $\frac{V}{R}$. Приравнявъ и освободивъ отъ знаменателей, мы видимъ, что

$$R+\theta(RrK+R^2K)+\theta^2(RlK+RLK)$$

должно быть равно

$$R+\theta(RrK+L)+\theta^2(RlK+LrK)+LlK\theta^3.$$

Такъ какъ V можетъ быть какой угодно функціей времени то эти дѣйствія будутъ эквивалентны только при условіи $LlK=0$, т. е. $l=0$; такъ что въ цѣпи съ конденсаторомъ не должно быть самоиндукціи; затѣмъ

$$RrK+R^2K=RrK+L;\ \text{т. е.}\ K=\frac{L}{R^2};$$

$$RlK+RLK=RlK+LrK;\ \text{т. е.}\ R=r;$$

слѣдовательно сопротивленіе въ цѣпи съ конденсаторомъ должно быть равно сопротивленію въ другой цѣпи.

Итакъ для цѣпи $R+L\theta$ мы должны взять цѣпь съ конденсаторомъ $R+\frac{1}{K\theta}$, гдѣ $K=\frac{L}{R^2}$.

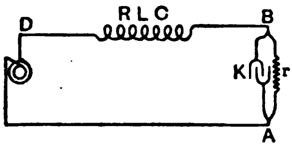
176. Если въ этомъ послѣднемъ случаѣ $V=V_0\sin nt$, то показатель дѣйствія можетъ быть приведенъ къ виду

$$\frac{1-K(l+L)n^2+K(r+R)\theta}{R-K(Rl+rL)n^2+\theta\left[RrK+L-LlKn^2\right]};$$

и если $\frac{R - K(Rl + rL)n^2}{1 - K(l+L)n^2} = \frac{RrK + L - LlKn^2}{K(r+R)}$,

то, хотя равенство это и нарушается при измѣненіи числа періодовъ, но, если величина n будетъ постоянна, то сила тока, входящаго у A и выходящаго у B, будетъ пропорціональна V и не будетъ запаздыванія фазы. Если $R = r$; то сила тока будетъ равна $\frac{V}{R}$.

177. Объяснить, почему иногда **дѣйствующій вольтажъ между проводами** въ пунктѣ D, черт. 92 **бываетъ менѣе, чѣмъ въ пунктѣ В дальше отъ генератора.** Это обыкновенно происходитъ благодаря распредѣленной въ проводахъ емкости (обыкновенно около $^1/_3$ микрофарада на милю). Мы ниже разслѣдуемъ распредѣленную емкость; теперь же предположимъ, что у B между проводами находится конденсаторъ емкости K. Пусть между проводами у B помѣщено сопротивленіе безъ индукціи r, положимъ отъ лампъ. Пусть сопротивленіе и самоиндукція проводовъ между D и B будутъ R и L. Пусть v вольтажъ у B, и C сила тока, идущаго отъ D къ B.



Черт. 92.

Сила тока, входящаго въ конденсаторъ, равна

$$v : \frac{1}{K\theta} \text{ или } K\theta v.$$

Сила тока, проходящаго черезъ r, равна $\frac{v}{r}$, слѣдовательно

$$C = \left(K\theta + \frac{1}{r}\right) v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Паденіе вольтажа между D и B равно

$$(R + L\theta)\, C \text{ или } (R + L\theta)\left(K\theta + \frac{1}{r}\right)v,$$

или $$\left\{\frac{R}{r} + \left(RK + \frac{L}{r}\right)\theta + LK\theta^2\right\} v.$$

Теперь, если $v = v_0 \sin nt$, то паденіе вольтажа будетъ

$$\left\{\left(\frac{R}{r} - LKn^2\right) + \left(RK + \frac{L}{r}\right)\theta\right\} v.$$

Вольтажъ у D равенъ паденію его плюсъ v или

$$\left\{\left(1 + \frac{R}{r} - LKn^2\right) + \left(RK + \frac{L}{r}\right)\theta\right\} v;$$

такъ что по п. 167

$$\frac{\text{квадратъ дѣйствующаго вольтажа при } D}{\text{квадратъ дѣйствующаго вольтажа при } B} =$$

$$= \left(1 + \frac{R}{r} - LKn^2\right)^2 + \left(RK + \frac{L}{r}\right)^2 n^2$$

и въ данномъ случаѣ могутъ быть такія величины постоянныхъ, при которыхъ это отношеніе будетъ менѣе 1. Для численнаго примѣра возьмите

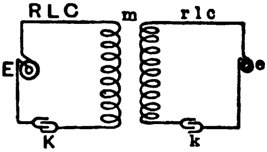
$$r = 10,\ R = 0.1,\ K = 1 \times 10^{-6},\ n = 1000,$$

и пусть L мѣняется отъ 0, до 0,05,0,01,0,02,0,03 и т. д.

Студентъ не встрѣтитъ затрудненій въ разслѣдованіи этой задачи также и въ томъ случаѣ, когда вмѣсто r въ (1) онъ возьметъ $r + l\theta$; т. е., когда дальше B помѣщены не только лампы, но также и обмотки съ самоиндукціей.

Болѣе общій случай двухъ обмотокъ.

178. Пусть на черт. 93 одна обмотка будетъ съ электродвижущей силой E, сопротивленіемъ R, самоиндукціей L, емкостью K; другая обмотка съ e, r, l, k, взаимной индукціей m.



Черт. 93.

Взявъ R вмѣсто $R + L\theta + \frac{1}{K\theta}$ и r вмѣсто $r + l\theta + \frac{1}{k\theta}$, получимъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} E &= RC + m\theta c, \\ e &= m\theta C + rc \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Замѣтимъ, что не слѣдуетъ безпокоиться относительно знаковъ при C и c и т. д., такъ какъ они будутъ ясны изъ рѣшенія.

Изъ этихъ уравненій мы получимъ

$$c = \frac{Re - m\theta E}{Rr - m^2\theta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

$$C = \frac{rE - m\theta e}{Rr - m^2\theta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

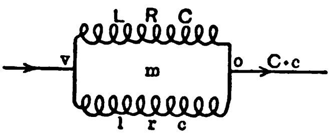
Теперь мы можемъ вмѣсто R, r, E и e подставить ихъ величины и получимъ силы токовъ.

Замѣтьте, что E можетъ означать вольтажъ въ предѣлахъ только части цѣпи и тогда R считается только между этими предѣлами.

Слѣдующія упражненія могутъ служить примѣрами этого общаго случая.

Есть множество и другихъ примѣровъ, въ которыхъ приходиться имѣть дѣло съ взаимной индукціей.

179. Пусть двѣ цѣпи (черт. 94) **съ самоиндукціей находятся въ параллельномъ соединеніи и взаимная индукція ихъ m.**



Черт. 94.

(1) Пусть между оконечностями ихъ $v = v_0 \sin nt$; уравненіе (2) изъ предыдущаго упражненія получаетъ видъ $c = \dfrac{R - m\theta}{Rr - m^2\theta^2}\, v$. Или, измѣняя R на $R + L\theta$, и r на $r + l\theta$,

$$c = \frac{R + (L - m)\theta}{[Rr - (Ll - m^2)\, n^2] + (Lr + lR)\,\theta}\, v.$$

(2) Какъ распредѣлится токъ $A \sin nt$ между двумя такими цѣпями? Такъ какъ $\dfrac{C}{c} = \dfrac{R - m\theta}{r - m\theta}$, то мы сразу можемъ найти $\dfrac{c}{C + c}$ и $\dfrac{C}{C + c}$.

Отвѣтъ: $c = \dfrac{R + (L - m)\,\theta}{(R + r) + (L + l - 2m)\,\theta} A \sin nt.$

Мы полагаемъ, что для студентовъ весьма полезно самымъ полнымъ образомъ изслѣдовать эти примѣры, причемъ для полноты рѣшенія они должны вспомнить правило, данное въ п. 167.

180. Вообразимъ, что въ предыдущемъ примѣрѣ **каждая изъ цѣпей имѣетъ также взаимную индукцію съ сложной**

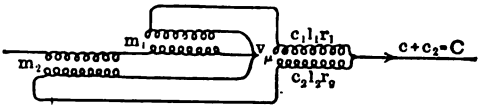


Рис. 95.

цѣпью. Мы воспользуемся новыми буквами (см. черт. 95).

Пусть v есть разность потенціаловъ между концами двухъ цѣпей, соединенныхъ параллельно. Пользуясь r, μ и m вмѣсто $r+l\theta$, $\mu\theta$ и $m\theta$ получимъ

$$v=r_1c_1+\mu c_2+m_1(c_1+c_2).$$

Отсюда получатся уравненія

$$v=(r_1+m_1)c_1+(\mu+m_1)c_2,$$
$$v=(\mu+m_1)c_1+(r_2+m_2)c_2,$$

$$c_1=\frac{(r_2+m_2)-(\mu+m_1)}{(r_1+m_1)(r_2+m_2)-(\mu+m_1)(\mu+m_2)}v \quad \ldots (1).$$

подобное же выраженіе будетъ и для c_2

Такимъ образомъ полный токъ C распредѣлится слѣдующимъ образомъ

$$c_1=\frac{(r_2+m_2)-(\mu+m_1)}{r_1+r_2-2\mu}C \quad \ldots\ldots (2).$$

Если мы напишемъ эти выраженія полностью, то помощью ихъ мы можемъ рѣшать замѣчательно интересныя задачи, что можетъ быть облегчено введеніемъ численныхъ величинъ для нѣкоторыхъ количествъ. Если мы хотимъ ввести сюда конденсаторы, то нужно только написать вмѣсто r, $r+l\theta+\frac{1}{k\theta}$ съ соотвѣтствующими значками; μ приметъ видъ $\mu\theta$ и m видъ $m\theta$.

До какихъ предѣловъ можемъ мы брать нѣкоторые изъ m отрицательными? Я не разсматривалъ этого подробно, но желающіе изъ студентовъ могутъ попробовать различныя величины и затѣмъ провѣрить свои результаты съ настоящими катушками. При отсутствіи конденсаторовъ, уравненіе (2) получитъ видъ

$$c_1 = \frac{r_2 + \theta(l_2 + m_2 - \mu - m_1)}{r_1 + r_2 + \theta(l_1 + l_2 - 2\mu)}\,C.$$

181. Вращающееся поле. Токъ проходитъ черезъ обмотку съ сердечникомъ безъ индукціи; тотъ же токъ проходитъ черезъ обмотку съ сердечникомъ съ индукціей. Катушки находятся подъ прямымъ угломъ другъ къ другу и взаимной индукціи нѣтъ; выяснить свойства полей въ центрѣ катушекъ, находящихся подъ прямымъ угломъ другъ къ другу. Пусть число оборотовъ будетъ n_1 и n_2. Вмѣсто сердечника съ индукціей вообразимъ замкнутую на себя катушку съ сопротивленіемъ r_3, числомъ оборотовъ n_3 и токомъ c. Для простоты предположимъ, что всѣ три обмотки имѣютъ одинъ и тотъ же радіусъ и что обмотки n_2 и n_3 хорошо изолированы. Напряженіе поля F_1 пропорціонально $n_1 C$ на квадратный сантиметръ, назовемъ его $n_1 C$. Другое F_2 пропорціонально или скажемъ, равно $n_2 C + n_3 c$ на квадр, сант. Примемъ, что полная индукція I въ каждой обмоткѣ пропорціональна напряженію поля въ ея центрѣ,—положимъ, въ b разъ больше. Тогда для третьей обмотки найдемъ.

$$0 = r_3 c + n_3 \theta I \text{ или} = r_3 c + b n_3 \theta (n_2 C + n_3 c).$$

такъ что

$$-c = \frac{b n_3 n_2 \theta C}{r_3 + b n_3^2 \theta},$$

и отсюда

$$F_2 = n_2 C - \frac{b n_3^2 n_2 \theta C}{r_3 + b n_3^2 \theta} = \frac{n_2 r_2 C}{r_3 + b n_3^2 \theta}.$$

Если теперь $C = C_0 \sin qt$.

то $F_1 = n_1 C_0 \sin qt$,

$$F_2 = \frac{n_2 C_0 \sin qt}{1 + b\dfrac{n_3^2}{r_3}\theta} = \frac{n_2 C_0}{\sqrt{1 + b^2 \dfrac{n_3^4}{r_3^2} q^2}} \sin\left(qt - \operatorname{arctg} \frac{b n_3^2}{r_3} q\right):$$

п. 126 рязъяснить свойства вращающагося поля. Мы можемъ показать, какимъ путемъ можно получить великолѣпное вращающееся поле.

Очевидно, что bn_3^2 въ реальномъ значеніи есть самоиндукція третьей катушки, а $\frac{bn_3^2}{r_3}$ означаетъ постоянную времени. Катушка съ однимъ оборотомъ, т. е. сердечникъ съ индукціей, всегда имѣетъ бо́льшую постоянную времени, чѣмъ катушка того же объема съ большимъ числомъ оборотовъ. Очевидно, что если сердечникъ сдѣланъ достаточно большихъ размѣровъ, мы для даннаго числа періодовъ можемъ получить почти однообразное и равномѣрно вращающееся поле, если сдѣлаемъ

$$n_2 : b\frac{n_3^2}{r_3}q = n_1.$$

Это одинъ изъ весьма многочисленныхъ примѣровъ, подтверждающихъ полезность нашего обозначенія дѣйствія θ.

182. Пусть въ п. 178 $E=V$ электродвижущей силѣ въ первичной обмоткѣ **трансформатора**, сопротивленіе которой R и самоиндукція L; положимъ, что во вторичной обмоткѣ нѣтъ самостоятельной электродвижущей силы; ея внутреннее сопротивленіе r_1, самоиндукція l, а внѣшнее сопротивленіе безъ индукціи отъ лампъ пусть будетъ ρ. Пусть вольтажъ между оконечностями вторичной обмотки $v = c\rho$.

Подставимъ въ (1), (2) и (3) п. 178 $E = V$, $e = 0$; вмѣсто R возьмемъ $R + L\theta$. Вмѣсто r примемъ $r + l\theta$, что въ дѣйствительности будетъ равно $r_1 + \rho + l\theta$,

$$c = \frac{-m\theta V}{Rr + (Rl + rL)\theta + (Ll - m^2)\theta^2} \quad \ldots\ldots (1),$$

$$C = \frac{(r + l\theta) V}{Rr + (Rl + rL)\theta + (Ll - m^2)\theta^2} \quad \ldots\ldots (2).$$

Замѣтимъ, что второе уравненіе (1) п. 178 будетъ

$$0 = m\theta C + (r + l\theta)c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)^*.$$

I. Изъ (2) *, если $\mathrm{C} = \mathrm{C_0 e^{at}}$, $c = \dfrac{-maC_0e^{at}}{r+la}$,

$$= \frac{-c}{C} = \frac{ma}{r+la} = \frac{m}{l}\left(\frac{1}{1+\dfrac{r}{la}}\right).$$

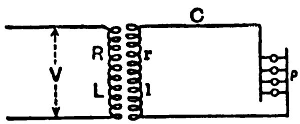
Если r мало сравнительно съ la, то

$$\frac{-c}{C} = \frac{m}{l}.$$

II. Если $\mathrm{C} = \mathrm{C_0 \sin qt}$, то опять, взявъ (2)*, получимъ

$$-c = \frac{mq}{\sqrt{r^2+l^2q^2}}\, C_0 \sin\left(qt + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{lq}{r}\right).$$

Отсюда $\dfrac{\text{дѣйствующее } c}{\text{дѣйствующее } C} = \dfrac{m}{l}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{r^2}{l^2q^2}}}$



Черт. 96.

За исключеніемъ того случая, когда нагрузка вторичной цѣпи менѣе обыкновенно встрѣчающейся на практикѣ, r незначительно въ сравненіи съ lq (нужно взять примѣръ изъ практики и доказать, что это такъ) и потому мы можемъ принять, что

$$C = C_0 \sin qt$$

$$c = C_0 \frac{m}{l} \sin(qt - \pi),$$

$$\frac{-\mathrm{c}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Въ нѣкоторыхъ практическихъ случаяхъ важно помнить, что отношеніе величинъ $-c$ и C въ нѣкоторый моментъ равно

$$mq \cos qt : (r \sin qt + lq \cos qt)$$

и иногда бываетъ равно ∞.

Возвращаемся къ (1). Пусть $Ll = m^2$ (этимъ выражается условіе **отсутствія магнитной потери**) и положимъ, что можно пренебречь Rr. Въ любомъ случаѣ изъ практики можно пренебречь Rr, даже когда r въ нѣсколько разъ превосходитъ сопротивленіе одной лампы.

Тогда $$-c = \frac{mV}{Rl + rL} \qquad (4),$$

такъ что $-c$, какъ функція времени, есть совершенная копія V; точно также и C.

Если N и n суть числа оборотовъ двухъ обмотокъ на одномъ и томъ же сердечникѣ; то

$$m : L : l = Nn : N^2 : n^2 \qquad (5),$$

такъ что $$-c = \frac{\frac{n}{N} V}{r + R \frac{n^2}{N^2}} \qquad (6);$$

т. е. сила тока во вторичной цѣпи такова, какъ будто въ ней дѣйствуетъ трансформированная электродвижущая сила $\left(-\frac{n}{N} V\right)$, и введено внѣшнее сопротивленіе, которое я называю трансформированнымъ первичнымъ сопротивленіемъ $\left(R \frac{n^2}{N^2}\right)$.

Если объемы обѣихъ обмотокъ равны, и равны объемы ихъ изолировки, то $R \frac{n^2}{N^2}$ будетъ равно r, внутреннему сопротивленію вторичной цѣпи. Принявъ это во вниманіе, получимъ

$$-c = \frac{\frac{n}{N} V}{2r_1 + \rho} \qquad (7);$$

а ρc или $$v = \frac{\frac{n}{N} V}{1 + \frac{2r_1}{\rho}} \qquad (8)$$

Такъ какъ r_1 обыкновенно мало сравнительно съ ρ, то

$$-v = \frac{n}{N} V\left(1 - \frac{2r_1}{\rho}\right),$$

и $\frac{2r_1}{\rho}$ называется паденіемъ вольтажа во вторичной цѣпи отъ нагрузки.

Такъ какъ $\frac{v^2}{\rho} = P$, энергіи сообщаемой лампамъ, то $\frac{1}{\rho} = \frac{P}{v^2}$ и дробь, выражающая паденіе потенціала, будетъ равна $\frac{2r_1}{v^2} P$ и пропорціональна количеству расходуемой энергіи или числу лампъ, которыя находятся въ цѣпи.

183. Предыдущіе результаты могутъ быть получены другимъ путемъ.

Пусть I будетъ индукція, одна и та же въ обѣихъ обмоткахъ. Здѣсь опять мы предполагаемъ отсутствіе магнитной потери,

$$V = RC + N\theta I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

$$0 = rc + n\theta I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Умножая каждое уравненіе на свое N или n, дѣля на соотвѣтствующее R или r и складывая, получимъ

$$\frac{NV}{R} = A + \left(\frac{N^2}{R} + \frac{n^2}{r}\right)\theta I \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

гдѣ $A = NC + nc$ и называется оборотами тока.

Разъ намъ извѣстна природа магнитной цѣпи, т. е. родъ желѣза, его сѣченіе α квадратныхъ сант., и средняя длина магнитной цѣпи λ, то мы можемъ получить соотношеніе между A и I. Я однако тщательно разслѣдовалъ этотъ вопросъ и нашелъ, что, каковъ бы ни былъ періодическій законъ для A, пока число періодовъ и размѣры сердечника не отступаютъ отъ обыкновенно употребляемыхъ на прак-

тикѣ, членъ A въ (3) совершенно незначителенъ. Отбросивъ его, мы найдемъ, что съ достаточной точностью

$$I=\frac{\theta^{-1}V}{N\left(1+\frac{n^2}{N^2}\frac{R}{r}\right)}=\frac{1}{N}\left(1-\frac{n^2}{N^2}\frac{R}{r}\right)\theta^{-1}V\;.\;.\;.\;.\;(4).$$

Такъ, въ одномъ трасформаторѣ въ 1500 уаттовъ $R=27$ омовъ, $N=460$ оборотовъ, часть r, выражажающая внутреннее сопротивленіе $=0.067$ омовъ, $n=24$ оборота, дѣйствующее $V=2000$ вольтъ, или $V=2828\sin qt$, гдѣ $q=$ около 600, $\alpha=360$, $\lambda=31$. Безъ нагрузки $r=\infty$; при полной нагрузкѣ $r=$ приблизительно 7 омамъ.

Мы назвали $R\frac{n^2}{N^2}$ трансформированнымъ сопротивленіемъ первичной цѣпи. Въ этомъ случаѣ оно равно $27\left(\frac{24}{460}\right)^2$ или 0,073 ома.

Если въ первичной и вторичной цѣпяхъ объемы мѣди были равны, то безъ сомнѣнія эта величина была бы болѣе близка къ 0,067, внутреннему сопротивленію вторичной цѣпи.

$\frac{n^2R}{N^2r}$ или $\frac{0,073}{r}$ есть дробное число, выражающее уменьшеніе I сравнительно со значеніемъ его при отсутствіи нагрузки. Когда при полной нагрузкѣ $r=7$ омамъ, уменьшеніе будетъ наибольшее и въ этомъ случаѣ оно равно $1^0/_0$. По причинѣ его малости мы и взяли въ (4) вмѣсто дробнаго увеличенія знаменателя, дробное уменьшеніе числителя.

Вычислимъ наибольшую величину I, т. е. когда трансформаторъ не нагруженъ; $\frac{1}{\theta}V$ есть интегралъ V или $-\frac{2828}{600}\cos 600\,t$. Такимъ образомъ амплитуда I будетъ $\frac{2828}{600\times 460}$.

Умножимъ эту максимальную величину I въ веберахъ на 10^8, чтобы получить ее въ C. G. S. единицахъ и раз-

дѣлимъ на $\alpha = 360$, — получимъ 2856 C. G. S. единицъ индукціи въ желѣзѣ на квадр. сант., какъ максимумъ въ продолженіи каждаго цикла для даннаго трансформатора.

Такъ какъ θI равно $\frac{V}{N} : \left(1 + \frac{n^2}{N^2}\frac{R}{r}\right)$, то изъ (2) мы получаемъ то же значеніе для $- rc$, какое имѣли раньше въ (6) п. 182.

184. Возвращаемся къ (7) п. 182. Положимъ, что **магнитная потеря существуетъ**, и что вмѣсто r_1 будетъ $r_1 + l'\theta$. Если вникнуть въ дѣло, то не трудно убѣдиться, что эта замѣна и будетъ выражать магнитную потерю. Тогда мы должны въ знаменатель выраженія (7) подставить

$$\rho + 2r_1 + 2l'\theta,$$

вмѣсто $\rho + 2r_1$. Такимъ образомъ нашъ прежній результатъ нужно раздѣлить на

$$1 + \frac{2l'}{\rho + 2r_1}\theta,$$

или, пренебрегая $2r_1$ по малости этой величины, на $1 + \frac{2l'}{\rho}\theta$.

Это значитъ, что прежняя амплитуда величины v должна быть уменьшена въ

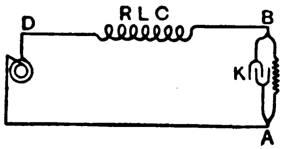
$$\sqrt{1 + \frac{4l'^2q^2}{\rho^2}} \text{ или, приблизительно, } 1 + \frac{2l'^2q^2}{\rho^2} \text{ разъ,}$$

если только магнитная потеря мала; при этомъ произойдетъ запаздываніе фазы на величину $\operatorname{arctg}\frac{2l'q}{\rho}$. Мы должны припомнить, что q равно $2\pi f$, гдѣ f есть число періодовъ въ секунду. Мы видѣли раньше, что P — энергія, передаваемая на лампы, обратно пропорціональна ρ, такимъ образомъ мы приходимъ къ выводу, что **дробное уменьшеніе**, являющееся отъ **обыкновенныхъ сопротивленій** будетъ $\frac{2r_1P}{v^2}$, а отъ **магнитной потери** равно $^1/_2\, a^2f^2P^2$, и что **запаздываніе фазы** благодаря магнитной потерѣ выражается угломъ ве-

личиной afP радіановъ, гдѣ a постоянаая, зависящая отъ величины потери, а f число періодовъ въ единицу времени.

185. Теперь необходимо разъяснить еще одну вещь, касающуюся трансформаторовъ. Если извѣстно V, то, проинтегрировавъ ее и раздѣливъ на N, мы получимъ I. Умноживъ эту величину на 10^8 и раздѣливъ на поперечную площадь сердечника, выраженную въ квадр. сантиметрахъ, мы получимъ зависимость β, — индукціи на квадр. сант. сердечника, отъ времени. Получивъ β, мы помощью кривой, выражающей зависимость для желѣза между H и β, можемъ найти для любой величины β соотвѣтственное значеніе H, и, умноживъ послѣднее на длину магнитной цѣпи, получимъ гауссажъ или $\frac{4\pi}{10}\times$ на обороты тока въ амперахъ A. Такимъ образомъ будетъ извѣстенъ законъ измѣненія A и, если во вторичной цѣпи тока нѣтъ, то мы получимъ **законъ измѣненія тока въ первичной цѣпи** для ненагруженнаго трансформатора. Послѣднее выраженіе однако не совсѣмъ точно, такъ какъ никогда трансформаторъ не бываетъ совершенно ненагруженнымъ, даже и въ томъ случаѣ, когда вторичная цѣнь имѣетъ безконечно большое сопротивленіе.

186. Задача W. Grove; выяснить значеніе конденсатора въ первичной цѣпи **индукціонной катушки** при перемѣнныхътокахъ.



Черт. 97.

На рис. 97 ADB есть первичная цѣпь съ электродвижущей силой $E = E_0 \sin nt$, сопротивленіемъ R и самоиндукціей L. BA есть конденсаторъ емкости K, а r сопротивленіе безъ индукціи въ параллельномъ соединеніи съ конденсаторомъ. C—сила тока въ первичной цѣпи; амплитуду ея обозначимъ черезъ C_0

Конденсаторъ имѣетъ сопротивленіе $\frac{1}{K\theta}$.

Когда r и K имѣютъ конечную величину, значеніе C_0 получить весьма легко *).

*) Когда r и K имѣютъ конечныя значенія, сумма параллельныхъ сопротивленій между B и A равна $\frac{r}{1+rK\theta}$, а общее сопро-

Но мы себѣ предложимъ рѣшить задачу въ предположеніи $r = 0$ и $r = \infty$. Когда $r = 0$, сопротивленіе будетъ $R + L\theta$ и сила тока $\frac{E}{R + L\theta}$, отсюда

$$C_0^2 = \frac{E_0^2}{R^2 + L^2 n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Когда $r = \infty$, сопротивленіе будетъ

$$R + L\theta + \frac{1}{K\theta} \text{ или } \frac{1 + RK\theta + LK\theta^2}{K\theta};$$

или по п. 167. $\frac{(1 - LKn^2) + RK\theta}{K\theta};$

$$\text{отсюда } C_0^2 = \frac{E_0^2 K^2 n^2}{(1 - LKn^2)^2 + R^2 K^2 n^2} = \frac{E_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{Kn} - Ln\right)^2} \ldots (2).$$

(2) будетъ болѣе (1), если $2KLn^2$ больше 1, такимъ образомъ сила тока въ первичной цѣпи увеличится, если емкость конденсатора будетъ больше $\frac{1}{2Ln^2}$. Максимумъ силы тока будетъ, когда $K = \frac{1}{Ln^2}$, въ этомъ случаѣ конденсаторъ вполнѣ уничтожаетъ самоиндукцію первичной цѣпи.

187. Альтернаторы въ послѣдовательномъ соединеніи. Пусть ихъ электродвижущія силы будутъ e_1 и e_2, а C будетъ сила тока. Получающаяся работа будетъ $e_1 C$ и $e_2 C$.

тивленіе цѣпи будетъ

$$R + L\theta + \frac{r}{1 + rK\theta}$$

такимъ образомъ сила тока

$$C = \frac{(1 + rK\theta) E_0 \sin nt}{(R + r - LrKn^2) + (RrK + L)\theta},$$

а отсюда

$$C_0^2 = \frac{(1 + r^2 K^2 n^2) E_0^2}{(R + r - LrKn^2)^2 + (RrK + L)^2 n^2}$$

Запаздываніе фазы для C также легко написать.

Если $e_1 = E \sin(tn + \alpha)$ и $e_2 = E \sin(nt - \alpha)$†, то $e_1 + e_2 = = 2E \cos\alpha \sin nt$.

Если l—самоиндукція каждой машины, r ихъ внутреннее сопротивленіе, $2R$—внѣшнее сопротивленіе и, если P_1 и P_2 суть среднія значенія количества работы, развиваемой этими машинами, то

$$C = \frac{2E\cos\alpha \,.\, \sin nt}{2l\theta + 2r + 2R} =$$

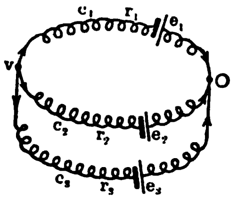
$$= \frac{E\cos\alpha}{\sqrt{(R+r)^2 + l^2n^2}} \sin\left(nt - \operatorname{arctg}\frac{ln}{R+r}\right), =$$

положимъ, $= M\cos\alpha \sin(nt - \varepsilon)$

отсюда $P_1 = {}^1/_2\, ME\cos\alpha \,.\, \cos(\alpha + \varepsilon)$

$P_2 = {}^1/_2\, ME\cos\alpha \,.\, \cos(\alpha - \varepsilon)$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что P_2 больше P_1, и что движеніе 2-ой машины будетъ замедляться, въ то время какъ первая получаетъ ускореніе; такимъ образомъ α будетъ увеличиваться, пока не дойдетъ до величины $\alpha = \frac{\pi}{2}$, когда P_1 и P_2 станутъ равными 0, такимъ образомъ ма-



Черт. 98.

шины будутъ нейтрализовать другъ друга и токъ прекратится. Отсюда слѣдуетъ, что **альтернаторы могутъ быть соединяемы послѣдовательно только при условіи закрѣпленія ихъ на общемъ валу.**

188. Такъ какъ мы уже часто имѣли дѣло съ параллельными цѣпями, мы здѣсь дадимъ слѣдующую общую формулу; если электродвижущія силы e_1, e_2 и e_3 (рис. 98) постоянны, то

$$v = e_1 - c_1 r_1 = e_2 - c_2 r_2 = e_3 - c_3 r_3 \;.\;.\;.\;.\; (1),$$

п $$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (2)$$

Если даны значенія e_1, e_2, e_3 и r_1, r_2, r_3, то легко найти силы токовъ, такъ какъ

$$v = \left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}\right) : \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) \quad \ldots\ldots (3).$$

Если же e перемѣнны, тогда вмѣсто простыхъ сопротивленій мы должны принять $r_1 + l_1\theta$ и т. д.

189. Альтернаторы въ параллельномъ соединеніи. Пусть два альтернатора, при чемъ каждый имѣетъ сопротивленіе r и самоиндукцію l, а электродвижущія силы ихъ

$$e_1 = E\sin(nt+\alpha) \text{ и } e_2 = E\sin(nt-\alpha),$$

будучи въ параллельномъ соединеніи между собой, присоединены къ цѣпи безъ индукціи, имѣющей сопротивленіе R. Какую среднюю работу будетъ давать каждая машина, и будутъ ли онѣ стремиться къ синхронизму? Если бы e_1 и e_2 были постоянными или $l=0$, тогда бы v было равно

$$v = e_1 - c_1 r = e_2 - c_2 r = (c_1 + c_2)\ R.$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{R}{2rR+r^2}\left\{e_1\left(1+\frac{r}{R}\right) - e_2\right\},$$

$$c_2 = \frac{R}{2rR+r^2}\left\{e_2\left(1+\frac{r}{R}\right) - e_1\right\}.$$

Теперь подставимъ $r + l\theta$ вмѣсто r, такъ какъ e перемѣнно. Легко видѣть, что

$$c_2 = e_1(a - b\theta),$$

$$e_1 = e_2(a + b\theta),$$

гдѣ $a^2 + b^2n^2 = 1$, $a = \cos 2\alpha$, $bn = \sin 2\alpha$. Такимъ образомъ

$$c_1 = \frac{\left(1+\frac{r}{R}-a\right) + \theta\left(\frac{l}{R}+b\right)}{\left(2r+\frac{r^2}{R}-\frac{l^2n^2}{R}\right) + \theta 2l\left(1+\frac{r}{R}\right)}\, e_1 \quad \ldots\ldots (1).$$

подобное же выраженіе въ зависимости отъ e_2 получится и для c_2, если исключить случай b — отрицательнаго. Преоб-

разуемъ выраженіе (1) по правилу *п.* 167, при чемъ для упрощенія введемъ величины:

$$tg\varphi=\frac{2ln\,(R+r)}{2Rr+r^2-l^2n^2}, tg\psi_1\frac{(l+b)\,n\;R}{R+r-aR} \text{ и } tg\psi_2=\frac{(l-bR)\,n}{R+r-aR}.$$

Тогда
$$c_1=M\sin\left(nt+\alpha-\varphi+\psi_1\right),$$
$$c_2=M\sin\left(nt-\alpha-\varphi+\psi_2\right),$$

при чемъ углы φ, ψ_1, ψ_2 будутъ заключаться между предѣлами 0 и 90°.

Средняя работа будетъ

$$P_1=ME\cos\left(\varphi-\psi_1\right),$$
$$P_2=ME\cos\left(\varphi-\psi_2\right),$$

гдѣ

$$M^2=\frac{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2-2\left(1+\frac{r}{R}\right)\cos 2\alpha+1+\frac{l^2n^2}{R^2}}{\left(2r+\frac{r^2}{R}-\frac{l^2n^2}{R}\right)^2+4l^2n^2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}E^2,$$

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\cos\left(\varphi-\psi_1\right)}{\cos\left(\varphi-\psi_2\right)}.$$

Если $R=\infty$, то мы получимъ

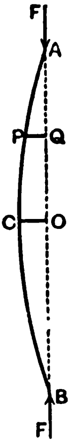
$$tg\varphi=\frac{ln}{r},\; tg\psi_1=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=-tg\psi_2.$$

Отсюда
$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\cos\left(\varphi-\psi_1\right)}{\cos\left(\varphi-\psi_2\right)}.$$

Въ этомъ случаѣ очевидно P_1 больше P_2. Авторъ этой книги самъ не занимался подробнымъ изслѣдованіемъ общаго выраженія для $\frac{P_1}{P_2}$, но тѣ, кто изучалъ его, приходили къ выводу, что P_1 всегда болѣе P_2. Студенты должны взять какія либо значенія для r, l, R и α и провѣрить это на дѣлѣ. Если P_1 всегда больше P_2, это указываетъ на то, что опережающій альтернаторъ будетъ давать бо́льшую работу и слѣдовательно движеніе его замедлится, а отстающій будетъ стремиться двигаться быстрѣе, такимъ образомъ они

оба будутъ стремиться къ совпаденію, отсюда слѣдуетъ, что **альтернаторы слѣдуетъ соединять параллельно.**

190. Стойки. Разсмотримъ вполнѣ призматическую стойку однороднаго матерьяла и, пренебрегая ея собственнымъ вѣсомъ, предположимъ, что къ обоимъ концамъ ея приложены въ центрѣ сѣченія ихъ силы F. Пусть ACB, черт. 99, представляетъ собой осевую линію согнутой стойки. Пусть $PQ = y$ будетъ прогибъ въ точкѣ P, при чемъ $OQ = x$. Пусть $OA = OB = l$. Предположимъ, что y весьма мало сравнительно съ длиной $2l$ стойки.



Черт. 99.

Изгибающій моментъ въ точкѣ P будетъ Fy, а кривизна будетъ $\frac{Fy}{EI}$, при чемъ E — модуль Юнга для даннаго матерьяла, а I — наименьшій моментъ инерціи поперечнаго сѣченія относительно оси, проходящей черезъ его центръ тяжести. Такъ какъ на основаніи п. 60 кривизна равна $-\frac{d^2y}{dx^2}$ *), то мы получимъ

$$\frac{Fy}{EI} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Далѣе такъ же, какъ и раньше, когда мы встрѣчали

---

*). Замѣтимъ, что, разъ мы кривизну линіи выражаемъ черезъ $\frac{d^2y}{dx^2}$, то, если выраженіе, къ которому мы ее приравниваемъ, само по себѣ положительно, то мы передъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ должны поставить такой знакъ, чтобы сдѣлать ее также положительной. Такимъ образомъ, если наклонъ кривой (черт. 99) мы будемъ разсматривать такимъ же способомъ, какъ мы это дѣлали для черт. 6, то мы убѣдимся, что въ предѣлахъ отъ $x = 0$ до $x = 0A$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ отрицательно, а такъ какъ y, а слѣдовательно и $\frac{Fy}{EI}$ положительно, то мы въ правой части уравненія (1) должны поставить знакъ —.

подобныя уравненія (см. п. 119), легко убѣдиться, что

$$y = a\cos x\sqrt{\frac{F}{EI}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

удовлетворяетъ уравненію (1) при любомъ значеніи a. При $x = 0$ мы получимъ $y = a$, такимъ образомъ значеніе a опредѣляется — это есть прогибъ стойки по серединѣ. Далѣе предлагаемъ внимательно слѣдить за ходомъ нашихъ разсужденій.

Когда $x = l$, $y = 0$. Отсюда

$$a\cos l\sqrt{\frac{F}{EI}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Теперь какъ это понимать?

Очевидно, должно быть равно нулю или a или $\cos l$. Но, разъ *произошелъ изгибъ*, такъ что a получило нѣкоторое конечное значеніе, *cos l долженъ быть равенъ* 0. Чтобы cos угла былъ равенъ 0, уголъ долженъ быть равенъ или $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ или $\frac{5\pi}{2}$ и т. д. Легко видѣть, почему мы останавливаемся только на $\frac{\pi}{2}$ *).

Отсюда **условіе, при которомъ можетъ произойти изгибъ, будетъ**

$$l\sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{\pi}{2} \text{ или } \mathbf{F} = \frac{\mathbf{EI}\pi^2}{4\mathbf{l}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4);$$

это будетъ нагрузка, которая произведетъ изгибъ. Этимъ

Легко убѣдиться, что полное рѣшеніе (см. п.п. 154 и 159) уравненія подобнаго (1), которое можетъ быть написано такъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

будетъ $$y = A\cos nx + B\sin nx$$

гдѣ A и B — произвольныя постоянныя. A и B опредѣляются въ каждомъ данномъ случаѣ по условіямъ заданія. Такъ въ настоящемъ случаѣ очевидно, что при $y = 0$, $x = l$ и $x = -l$ слѣд.

$$0 = A\cos nl + B\sin nl,$$

$$0 = A\cos nl - B\sin nl, \text{ а отсюда } B = 0\cdot$$

*) Это значеніе угла даетъ наименьшую величину для F. Значеніе другихъ случаевъ заключается въ томъ, что y можетъ нѣс-

выражается законъ Эйлера. Нагрузка, выражаемая уравненіемъ (4), можетъ одинаково произвести и очень малый и весьма большой изгибъ. Весьма легко эту теорію стоекъ распространить и на случаи, когда стойка закрѣплена двумя концами или однимъ.

Въ случаѣ весьма большого изгиба, уравненіе (1) неправильно. такъ какъ при большихъ изгибахъ кривизна не равна $\frac{d^2y}{dx^2}$, но для цѣлей инженернаго искусства его можно считать достаточно точнымъ.

191. Мы можемъ считать силу F въ уравненіи (1), какъ такую, при которой стойка ломается отъ изгиба. Если f будетъ временное сопротивленіе на сжатіе, а A поперечное сѣченіе стойки, то нагрузка fA разрушитъ стойку непосредственнымъ сжатіемъ, такимъ образомъ изъ этихъ двухъ нагрузокъ мы должны принимать во вниманіе меньшую. Легко видѣть, что fA приходится брать для короткихъ стоекъ или для такихъ, которыя искусственно *) защищены отъ изгиба, а (4)—для длинныхъ стоекъ. Но, какія бы ни были приняты мѣры, легко убѣдиться, что никогда стойки не бываютъ вполнѣ прямы и однородны, и что ихъ невозможно нагрузить правильнымъ образомъ. Слѣдовательно, будучи нагружены, онѣ изгибаются даже **при самыхъ малыхъ нагрузкахъ** и ломаются при грузахъ меньшихъ fA или того, который опредѣляется равенствомъ (4). Довольно любопытно однако то, что, если испытывать стойки одинаковаго сѣченія, но разной длины, то ломающіе грузы, хотя и съ грубымъ приближеніемъ, слѣдуютъ нѣкоторому закону въ смыслѣ зависимости отъ длины. Такъ какъ для короткихъ стоекъ надо принимать $F=fA$, а для длинныхъ брать выраженіе (4), то мы можемъ для стоекъ любой длины принять формулу

$$F=\frac{fA}{1+\frac{fA4l^2}{EI\pi^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

колько разъ въ предѣлахъ между $x=0$ и $x=l$ принимать значеніе 0, такъ что стойка будетъ имѣть нѣсколько точекъ перегиба.

*) Это замѣчаніе заключаетъ въ себѣ цѣлую теорію стоекъ въ томъ видѣ, какъ ею пользовались при проектированіи Фортскаго моста.

такъ какъ она вѣрна **и для короткихъ и для длинныхъ стоекъ.** Дѣйствительно, если l велико, то въ знаменателѣ мы можемъ пренебречь 1, и (5) приметъ видъ $F = \frac{EI\pi^2}{4l^2}$, если же l мало, то мы можемъ знаменатель принять равнымъ 1 и получимъ $F = fA$. Такимъ образомъ, мы пользуемся въ этомъ случаѣ нѣкоторой эмпирической формулой, которая одинаково приложима для всѣхъ стоекъ. Чтобы привести ее къ обычному виду, положимъ $I = Ak^2$, гдѣ k—наименьшій радіусъ инерціи сѣченія относительно оси, проходящей черезъ его центръ тяжести, тогда

$$F = \frac{fA}{1 + a\frac{l^2}{k^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

гдѣ a равно $\frac{4f}{E\pi^2}$; a и f суть величины, которыя могутъ быть получены изъ опытовъ со стойками.

Если F приложена не въ центрѣ сѣченія концовъ, а на разстояніи h отъ него, то наше конечное условіе будетъ заключаться въ томъ, что $y = h$ при $x = l$. Это объясняетъ намъ, почему стойки неправильно нагруженныя ломаются при меньшей нагрузкѣ, чѣмъ та, которая опредѣляется въ (4). Студенты, желающіе поближе познакомиться съ этимъ вопросомъ, могутъ обратиться къ *Engineer* за 1886 г. стр. 464—513, гдѣ приняты во вниманіе и начальныя обстоятельства изгиба.

192. Стойка съ боковой нагрузкой. Ограничимся разсмотрѣніемъ только стоекъ съ концами, укрѣпленными на шарнирахъ. Если боковая нагрузка такова, что сама по себѣ, предполагая конечно и уравновѣшивающія ее опорныя сопротивленія, производитъ изгибающій моментъ, который мы назовемъ $\varphi(x)$, то по (1) п. 190 мы получимъ

$$Fy + \varphi(x) = -EI\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Такъ, пусть стойка равномѣрно нагружена боковой нагрузкой, положимъ, центробѣжной силой или собственнымъ вѣсомъ, тогда $\varphi(x) = {}^1/_2\, w'(l - x)^2$, если w' боковая нагрузка на единицу длины.

Мы считаемъ болѣе удобнымъ принять $\varphi(x) = {}^1/_4\, Wl \cos\frac{\pi}{2l}x$,

гдѣ W — полная боковая нагрузка, это будетъ мало отличаться отъ предыдущаго выраженія. Отсюда

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{F}{EI}y+{}^1/_4\,\frac{Wl}{EI}\cos\frac{\pi}{2l}x=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(1).$$

Не трудно убѣдиться, что

$$y=\frac{{}^1/_4 Wl}{EI\frac{\pi^2}{4l^2}-F}\cos\frac{\pi}{2l}x\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2).$$

Замѣтимъ, что при $F=0$, это уравненіе представляетъ уравненіе упругой линіи балки.

Прогибъ по серединѣ будетъ

$$y_1=\frac{{}^1/_4 Wl}{EI\frac{\pi^2}{4l^2}-F}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(3).$$

и наибольшій изгибающій моментъ будетъ

$$\mu=Fy_1+{}^1/_4\,Wl,\ \text{или}$$

$$\mu={}^1/_4\,Wl.\frac{EI\pi^2}{4l^2}:\left(\frac{EI\pi^2}{4l^2}-F\right)\,.\,.\,.\,.\,.\,(4).$$

Если $W=0$, а μ можетъ принять любую величину, то знаменатель (4) долженъ быть равенъ 0. Полагая его равнымъ 0, мы получили бы законъ Ейлера для стоекъ, которыя настолько длинны, что разрушаются отъ изгиба. Если значеніе Ейлера для F назовемъ черезъ U, т. е. $U=\frac{EI\pi^2}{4l^2}$, то (4) приметъ видъ

$$\mu={}^1/_4\,Wl\,\frac{U}{U-F}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(5).$$

Если z_c — наибольшее разстояніе точекъ сѣченія отъ нейтральной оси со стороны сжимающихъ напряженій, т. е. если $\frac{I}{z_c}=Z$ — наименьшему моменту сопротивленія сѣченія, а A площадь сѣченія, и если f — наибольшее сжимающее напряженіе въ сѣченіи то

$$\frac{\mu}{Z}+\frac{F}{A}=f.$$

Пользуясь этимъ выраженіемъ и подставляя β вмѣсто $\frac{U}{A}$ (ломающая нагрузка Ейлера на квадр. дюймъ сѣченія) и w вмѣсто $\frac{F}{A}$

(истинная ломающая нагрузка на квадр. дюймъ), мы получимъ

$$\left(1-\frac{w}{f}\right)\left(1-\frac{w}{\beta}\right)=\frac{Wl}{4fZ} \dots\dots\dots\dots (6).$$

Эту формулу не трудно запомнить. Изъ нея можно опредѣлить w.

Примѣръ. Каждая точка желѣзнаго или стального спарника имѣющаго длину $2l$ дюймовъ, описываетъ окружность радіуса r дюймовъ. Сѣченіе его прямоугольное, имѣющее размѣры d дюймовъ по направленію движенія и b въ направленіи, перпендикулярномъ къ нему. Мы можемъ принять $W=\frac{lbdrn^2}{62940}$ фунтовъ, гдѣ n — число оборотовъ въ минуту. Будемъ считать стержень укрѣпленнымъ своими концами помощью шарнировъ и изслѣдуемъ возможность его разрушенія по двумъ направленіямъ.

1) Въ томъ направленіи, въ которомъ центробѣжная сила отсутствуетъ, моментъ инерціи $I=\frac{db^3}{12}$ и для ломающаго груза формула Эйлера даетъ величину

$$\frac{Edb^3\pi^2}{48l^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7).$$

Эту продольную нагрузку мы будемъ принимать, какъ ломающую, также и для другого направленія, такъ что разрушеніе можетъ одинаково произойти въ той и въ другой плоскости.

2) Изгибъ въ направленіи дѣйствія центробѣжной силы. Чтобы получить w для уравненія (6), нужно взять выраженіе (7) и раздѣлить его на bd; полагая

$$E=3\times10^7,$$

мы получимъ
$$w=6.17\times\frac{b^2}{l^2}\times10^6.$$

Принимая наибольшее допускаемое напряженіе для стали равнымъ 20000 ф. на кв. дюймъ (припомнимъ, что вслѣдствіе перемѣнныхъ напряженій, его надо брать меньшимъ) и, имѣя въ виду, что въ этомъ направленіи $I=\frac{bd^3}{12}$, мы уравненіе (6) получимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$8{\cdot}4\times10^8\left(1-308\frac{b^2}{l^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{d^2}\right)=\frac{n^2l^2r}{d} \dots\dots (8).$$

Такъ, возьмемъ, напримѣръ, $b=1$, $l=30$, $r=12$; слѣдующая таблица даетъ значенія n для различныхъ величинъ d, полученныя изъ уравненія (8).

d	1	1·5	2	2·5	3	4	6
n	0	205	277	327	368	437	545

Упражненіе. Круглый стальной стержень имѣетъ діаметръ 1 дюймъ и длину 8 футъ, иначе говоря, $l = 48$ дюймамъ. Возьмемъ $F = 1500$ фунтовъ. Доказать, что если одновременно приложить къ стержню продольную нагрузку, которая въ отдѣльности производитъ напряженіе 1910 ф. на кв. д., и сгибающій моментъ дающій въ отдѣльности напряженіе 816 ф. на кв. д., то напряженіе въ стержнѣ получится равнымъ 23190 ф. на кв. д.

Другіе интересные примѣры можно найти въ *The Philosophical Magazine* за мартъ 1892 года. †

ГЛАВА III.

Академическія упражненія.

193. Въ главѣ I мы имѣли дѣло съ дифференцированіемъ и интегрированіемъ x^n, а въ главѣ II e^{ax} и $\sin ax$, и если не задаваться цѣлью болѣе полнаго ознакомленія съ анализомъ, то больше ничего и не требуется. Если мы знаемъ эти три функціи, то этого достаточно почти для всѣхъ практическихъ инженерныхъ цѣлей. Дѣйствительно, дальше будетъ видно, что многіе изъ примѣровъ, данныхъ въ въ этой главѣ, могли бы быть даны и въ главахъ I и II. Для дифференцированія и интегрированія функцій вообще, мы бы совѣтовали студентамъ прочесть систематическій курсъ, пропуская въ немъ трудныя мѣста при первоначальномъ чтеніи и возвращаясь къ нимъ впослѣдствіи, когда уже получены тѣ предварительныя значенія, которыя необходимы для ихъ пониманія. Если студентъ не имѣетъ ихъ руководителя, который разъяснилъ бы ему эти трудныя мѣста, то онъ и самъ своимъ умомъ дойдетъ до ихъ пониманія. **При помощи немногихъ правилъ** легко пріобрѣсти умѣнье дифференцировать алгебраическія функціи x и, хотя мы и выразили желаніе, чтобы студенты познакомились съ ними по систематическому курсу, однако мы здѣсь дадимъ ихъ. Правила эти нужны главнымъ образомъ для тѣхъ школьниковъ, которымъ нужно наскоро подготовиться къ экзаменамъ и получить навыкъ въ дифференцированіи. Но подобные юноши такъ рѣдко берутся потомъ за этотъ страшный предметъ и такъ скоро потомъ забываютъ его, благодаря тому, что въ дѣйствительности они никогда и не понимали, что значитъ $\frac{dy}{dx}$, что мы бы посо-

вѣтовали начинающимъ не гнаться за такимъ навыкомъ въ дифференцированіи, а сначала поблуждать впотьмахъ, какъ это приходилось дѣлать и нашимъ старымъ учителямъ, хотя и по другой причинѣ. Когда же предметъ станетъ совершенно ясенъ, тогда можно и постараться достичь навыка въ дифференцированіи и удержать его за собой. Искусство это легко усваивается, а при рѣшеніи различныхъ примѣровъ, во всякомъ случаѣ еще пріобрѣтается столь важная для практики опытность въ обращеніи съ алгебраическими и тригонометрическими выраженіями.

Въ главахъ I и II мы настаивали на томъ, чтобы студенты изображали графически функціи, имѣющія видъ

$$y = ax^n,\ y = ae^{bx},\ y = a\sin(bx + c).$$

Точно также они должны поступать и со всякой новой функцій, которая встрѣтится имъ. Но мы должны здѣсь предупредить ихъ, что лучше выбрать немногія изъ нихъ и изучить ихъ основательно, чѣмъ имѣть туманное представленіе о многихъ.

Инженеру приходится на каждомъ шагу изобрѣтать и при рѣшеніи любой задачи онъ имѣетъ за собой то преимущество, что ему приходится дѣйствовать вполнѣ самостоятельно. Не важно самое рѣшеніе задачи, а важно то, какъ она рѣшена.

Изобразить графически $y = \mathrm{tg}\, ax$. Мы предполагаемъ, что студентъ уже продѣлалъ это съ $y = ae^{bx}\sin nx$.

194. Пусть $y = f(x)$, такъ что, когда выбрано частное значеніе x, то можно вычислить y. Пусть взято новое значеніе x, а именно $x + \delta x$; оно дастъ намъ возможность вычислить соотвѣтствующее значеніе y, а именно

$$y + \delta y = f(x + \delta x).$$

Вычитаемъ и дѣлимъ на δx тогда мы получимъ

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Этимъ мы обозначаемъ въ общемъ видѣ то, что мы должны сдѣлать съ нѣкоторой функціей и что мы уже дѣлали раньше съ нашими тремя функціями; **по нашему опредѣленію $\frac{dy}{dx}$ есть предѣлъ,** къ которому стремится (1) по мѣрѣ безпредѣльнаго уменьшенія δx.

195. Изъ этого опредѣленія очевидно, что производная $af(x)$ есть a, умноженное на производную $f(x)$, и легко показать, что производная **суммы** функцій равна суммѣ производныхъ каждой изъ нихъ отдѣльно. Въ нѣкоторыхъ изъ примѣровъ главы I мы приняли это безъ доказательства. Мы можемъ представить это доказательство въ слѣдующей формѣ.

Пусть $y = u + v + w$ — суммѣ трехъ данныхъ функцій x. Пусть x переходитъ въ $x + \delta x$, u въ $u + \delta u$, v въ $v + \delta v$ и w въ $w + \delta w$. Изъ этого слѣдуетъ, что, если y переходитъ въ $y + \delta y$, то

$$\delta y = \delta u + \delta v + \delta w.$$

и

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta x},$$

а въ предѣлѣ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx},$$

196. Производная произведенія двухъ функцій. Пусть $y = uv$, гдѣ u и v суть функціи x. Когда x становится $x + \delta x$, пусть

$$y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) = uv + u.\delta v + v.\delta u + \delta u.\delta v.$$

Вычитая, находимъ

$$\delta y = u.\delta v + v.\delta u + \delta u.\delta v,$$

и

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}.\delta v,$$

Далѣе, положимъ что δx, а стало быть, (какъ это принималось постоянно въ нашихъ разсужденіяхъ), и δu, δv и δy безпредѣльно уменьшаются, тогда, каково-бы ни было значеніе $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dx}.\delta v$ должно въ предѣлѣ обратиться въ 0, а потому

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Студентъ самъ долженъ перевести это выраженіе на обычный языкъ. Также легко доказать, написавъ только uvw въ видѣ $uv \times w$, что если $y = uvw$, то

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + vw\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx}.$$

Примѣры. Пусть $y = 10x^7$, тогда непосредственно $\frac{dy}{dx} = 70x^6$. Но мы то же самое можемъ написать въ видѣ $y = 5x^3 \times 2x^4$. Наше новое правило дастъ

$$\frac{dy}{dx} = 5x^3(8x^3) + 2x^4(15x^2) = 40x^6 + 30x^6 = 70x^6.$$

Предлагается студенту самому подобрать другіе примѣры.

197. Производная частнаго.

Пусть $y = \frac{u}{v}$, при чемъ u и v суть функціи x.

Тогда
$$y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}.$$

Вычитая, находимъ

$$\delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v.du - u.dv}{v^2 + v.dv},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2 + v.dv}$$

Предполагая, что dv безпредѣльно уменьшается, мы видимъ, что $v.dv$ стремится къ 0, и отсюда имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Здѣсь опять студентъ долженъ перевести правило на обычный языкъ и долженъ постараться запомнить, что на первомъ мѣстѣ стоитъ $v\ \frac{du}{dx}$:

Знаменатель, умноженный на производную числителя, минусъ числитель, умноженный на производную знаменателя, и все дѣленное на квадратъ знаменателя.

Нужно продѣлать нѣсколько численныхъ примѣровъ, напримѣръ, $y = \frac{24x^7}{3x^2}$ равно въ дѣйствительности $8x^5$, и $\frac{dy}{dx} = 40x^4$.

По нашему правилу $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(168x^6) - 24x^7(6x)}{9x^4} = 40x^4$.

Студентъ долженъ продѣлать нѣсколько упражненій, напримѣръ, $y = \frac{15x^2}{3x^4} = 5x^{-2}$ или еще $y = \frac{7x^{3/2}}{-2x^4} = -{}^7/_2\,x^{-5/2}$, и провѣрить результаты.

198. Если y дано, какъ функція z, а z дано, какъ функція x, тогда легко выразить y, какъ функцію b. Напримѣръ, пусть $y = b\log(az^2 + g)$ и $z = c + dx + \sin ex$, тогда

$$y = b\log[a(c + dx + \sin ex)^2 + g].$$

Такимъ образомъ, положимъ, что $y = f(z)$ и $z = F(x)$; если вмѣсто x мы возьмемъ $x + \delta x$ и при этомъ значеніи вычислимъ $z + \delta z$, а при значеніи $z + \delta z$ вычислимъ $y + \delta y$. тогда мы можемъ сказать, что наше δy находится въ зависимости отъ δx и можемъ написать

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta z} \times \frac{\delta z}{\delta x} \qquad (1).$$

Это очевидно справедливо, такъ какъ δz въ обѣихъ дробяхъ сохраняетъ одно и то же значеніе, какъ бы мало оно не становилось, а отсюда слѣдуетъ, что правило (1) остается справедливымъ и тогда, когда δx безпредѣльно уменьшается, а такъ какъ мы предполагаемъ, что и δz безпредѣльно уменьшается, то получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \qquad (2).$$

Это положеніе имѣетъ такое громадное значеніе, что студентъ только тогда имѣетъ право считать себя удовлетвореннымъ, когда совершенно ясно убѣдится, что это дѣйствительно такъ. Необходимо замѣтить, что символъ dz не можетъ быть поставленъ отдѣльно; мы ничего не знаемъ относительно самого dz, для насъ ясно только значеніе полнаго символа $\frac{dy}{dz}$ и $\frac{dz}{dx}$.

Для начинающаго эти разсужденія могутъ показаться утомительными, но это неизбѣжно для легкости дальнѣйшаго его ознакомленія съ этимъ вопросомъ. Поэтому онъ долженъ выяснить для себя этотъ законъ на численныхъ при-

мѣрахъ. Пусть, напримѣръ, $y = az^3$ и $z = bx^2$. Такъ какъ $\frac{dy}{dz} = 3az^2$. $\frac{dz}{dx} = 2bx$, то мы имѣемъ $\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 6abz^2x$ или $6ab^3x^5$. Но, если послѣ подстановки $y = ab^3x^6$, мы продифференцируемъ непосредственно, мы получимъ тотъ же отвѣтъ. Студентъ долженъ самъ составить нѣсколько примѣровъ.

Старательный студентъ можетъ выяснить себѣ (2) посредствомъ трехъ кривыхъ; одной, связывающей z и x, другой, связывающей y и z и третьей, полученной изъ двухъ первыхъ посредствомъ измѣреній, и помощью ихъ показать, что для нѣкотораго значенія x уклонъ кривой (y, x) равенъ произведенію уклоновъ другихъ двухъ кривыхъ. Но, правду сказать, этотъ методъ слишкомъ сложенъ, чтобы быть особенно поучительнымъ. Распространяя далѣе наши разсужденія, мы видимъ, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

199. Гораздо легче доказать помощью кривой, что

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

такъ какъ легко видѣть, что $\frac{dx}{dy}$ есть котангенсъ угла, для котораго $\frac{dy}{dx}$ служитъ тангенсомъ.

Другой способъ. Если при увеличеніи x на величину δx мы получимъ приращеніе y равное δy, и если мы, взявъ отъ δy, обратно вычислимъ δx, то для него получимъ то же значеніе, съ котораго начали. Отъ сюда

$$\frac{\delta y}{\delta x} \times \frac{\delta x}{\delta y} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

На томъ основаніи, что (5) справедливо, какъ бы мало ни было δx, справедливо и (4).

200. Поясненіе къ (2). Если взять **индикаторную діаграмму газовой машины**, то, примѣняя п. 57, легко изъ нея найти діаграмму для h, величины, показывающей сколько газъ получаетъ теплоты въ футо-фунтахъ **на единицу из-**

мѣненія объема, при условіи, что имѣемъ постоянный газъ, получающій теплоту изъ нѣкотораго источника (въ дѣйствительности этотъ источникъ заключается въ самомъ газѣ, теплота получается изъ его химической энергіи).

Подобно тому, какъ давленіе есть $\frac{dW}{dv}$ — величина работы, затраченной на единицу измѣненія объема, такъ и $h = \frac{dH}{dv}$. Замѣтимъ, что h выражается въ тѣхъ же самыхъ единицахъ, какъ и p, и, чтобы начертить кривую для h, нечего обращать вниманіе на масштабы p и v. Ихъ можно измѣрять на діаграммѣ дюймами. Вмѣсто того, чтобы брать индикаторную діаграмму и, измѣряя тангенсы касательныхъ, находить производныя, проще будетъ, начертивъ эту діаграмму въ большемъ масштабѣ, составить таблицу значеній p и v и найти приблизительно $\frac{dp}{dv}$ для каждаго значенія v. Пользуясь этими значеніями и найдя значенія $h = \frac{dH}{dv}$ для различныхъ точекъ, предложимъ себѣ задачу найти то количество теплоты, которое газъ получаетъ **въ секунду**. Если t представляетъ время, то

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dv} \cdot \frac{dv}{dt},$$

слѣдовательно нужно h умножить на $\frac{dv}{dt}$. Такъ какъ $\frac{dv}{dt}$ представляетъ скорость поршня, и такъ какъ движеніе поршня по первому приближенію есть простое гармоническое, то мы описываемъ полуокружность на діаметрѣ, равномъ ходу поршня, и тогда ординаты полукруга дадутъ $\frac{dv}{dt}$. Поэтому, умножая каждую величину h на соотвѣтственную ординату полукруга, мы получаемъ въ опредѣленномъ масштабѣ діаграмму, каторая покажетъ во всякій моментъ $\frac{dH}{dt}$.

Такъ какъ мы уже видѣли, что $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ и что

$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$, то мы часто будемъ поступать съ dy или dx, какъ будто они дѣйствительныя алгебраическія количества, помня однако, что, хотя dy или dx и могутъ писаться отдѣльно, но это дѣлаютъ только ради удобства; такъ, напримѣръ, можно написать

$$M.dx + N.dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

гдѣ M и N суть функціи x и y, но это въ дѣйствительности замѣняетъ выраженіе

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Далѣе, пусть $y = ax^2$, мы можемъ написать

$$dy = 2ax.dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

но это только замѣняетъ выраженіе

$$\frac{dy}{dx} = 2ax \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Основаніе, которымъ мы руководствуемся въ этомъ случаѣ, заключается въ томъ, что, если бы мы пожелали интегрировать (3), то намъ нужно было бы только написать символъ $\int$, а, еслибы мы пожелали интегрировать (4), то мы должны были бы выражать этотъ процессъ словами, несмотря на то, что оба эти процесса въ сущности одно и то же. Мы уже пользовались въ такомъ смыслѣ dy и dx въ главѣ I.

Простыхъ математическихъ примѣровъ, поясняющихъ п. 198 можно составить множество, но такихъ, которые бы заставили основательно подумать, найти не такъ легко. Законъ правиленъ, не трудно это доказать, но нужно, чтобы этотъ законъ вошелъ въ плоть и кровь, а для этого нужно кое-что побольше академическаго доказательства.

Примѣнимъ теперь на дѣлѣ эти принципы.

201. Пусть $y = \log x$; это выраженіе совершенно равносильно $x = e^y$, а потому $\frac{dx}{dy} = e^y = x$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Въ главѣ I мы пользовались этимъ выводомъ безъ доказательства. Это есть случай, составляющій исключеніе при интегрированіи x^n.

202. Извѣстно, что производная $\sin x$ равна $\cos x$, **найти** производную $\sin ax$.

$$y = \sin ax = \sin u, \text{ если } u = ax.$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u \text{ и } \frac{du}{dx} = a,$$

такъ что $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \cos u \times a = a \cos ax.$

Найти производную $y = \cos ax$, зная, что производная $\sin x$ равна $\cos x$.

$$y = \cos ax = \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = \sin u, \text{ гдѣ } \frac{du}{dx} = a,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \times a = a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin ax.$$

203. Пусть $y = \log(x + a)$.

Положимъ, $x + a = u$, или $y = \log u$, тогда $\dfrac{du}{dx} = 1$ и $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x + a}.$$

204. $y = \operatorname{tg} x$. Представимъ этотъ послѣдній, какъ частное $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Студентъ долженъ получить этотъ результатъ и непосредственнымъ способомъ.

205. $y = \operatorname{ctg} x$. Мы теперь ознакомились уже съ нѣкоторыми пріемами.

Представимъ его въ видѣ частнаго $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

или мы можемъ поступить такимъ способомъ:

$$y = u^{-1}, \text{ если } u = \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \times \frac{du}{dx} = -u^{-2} \times \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

206. Пусть $y = \sin ax^2$, положимъ $y = \sin u$ и $u = ax^2$.

Тогда
$$\frac{du}{dx} = 2ax,$$

и
$$\frac{dy}{du} = \cos u,$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u \times 2ax = 2ax \cos ax^2.$$

Пусть $y = e^{a\sin x}$, положимъ $y = e^u$, и $u = a \sin x$, такъ что

$$\frac{dy}{du} = e^u, \frac{du}{dx} = a \cos x,$$

такъ что
$$\frac{dy}{dx} = e^u a \cos x, \text{ или } a \cos x.\ e^{a\sin x}.$$

207. $y = \sec x$. Мы можемъ поступить съ нимъ или, какъ съ частнымъ, или слѣдующимъ образомъ: $y = (\cos x)^{-1} = u^{-1}$ гдѣ $u = \cos x$.

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -u^{-2}(-\sin x)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x.\ \operatorname{tg} x.$$

208. Въ пунктѣ 11 уравненіе циклоиды было дано въ зависимости отъ вспомогательнаго угла φ; $x = a\varphi - a \sin \varphi$ $y = a - a \cos \varphi$.

Найдемъ $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ нѣкоторой точкѣ.

Здѣсь $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi}$

$$= \frac{a \sin \varphi}{(a - a \cos \varphi)} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

Также $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{d\varphi}{dx}$$

$$=\frac{(1-\cos\varphi)\cos\varphi-\sin\varphi\,(\sin\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2}:(a-a\cos\varphi)$$

$$=\frac{-1}{a(1-\cos\varphi)^2}=-\frac{a}{y^2}.$$

209. Если $$x^2+y^2=a^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .(1),\ \text{то}$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \text{ или } \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ .\ .\ .\ .(2).$$

Если мы желаемъ выразить $\frac{dy}{dx}$ только черезъ x, то мы должны найти y изъ (1) и подставить его въ (2). Но для практическихъ приложенiй болѣе пригодно (2).

Такимъ же самымъ путемъ, если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \text{ или } \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Далѣе, если $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Также, если $$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},$$

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3}+\tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0 \text{ или } \frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

Если $y=\tfrac{3}{8}x+\tfrac{1}{4}\sin 2x+\tfrac{1}{32}\sin 4x,\ \frac{dy}{dx}=\cos^4 x.$

Если $y=\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}{}^3x+\operatorname{tg}x,\ \frac{dy}{dx}=\sec^4 x.$

Пусть $y=\sqrt{x^2+a^2}=u^{1/2}$, при чемъ $u=x^2+a^2$, $\frac{du}{dx}=2x$,

такъ что $$\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{2}u^{-1/2}\times 2x \text{ или } \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

210. Пусть $y=\operatorname{arc}\sin x$. Иначе говоря, y есть уголъ, синусъ котораго равенъ x; отсюда $x=\sin y$

$$\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

Отсюда $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Мы извлекли корень квадратный, и нашъ результатъ можетъ быть со знакомъ $+$ или $-$. Изъ нихъ мы должны выбрать тотъ, который поставленъ предъ $\cos y$.

211. Подобнымъ образомъ, если $y = \mathbf{arc\ cos\ x}$;

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

212. Пусть $y=\mathbf{arctg\ x}$, такъ что $x=\operatorname{tg} y$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}.$$

213. Подобнымъ образомъ, если $y=\mathbf{arcctg\ x}$, тогда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

214. Отсюда видно, что выраженіе (2) и (4) п. 198 и 199 даютъ намъ возможность дифференцировать многія обычныя выраженія, и студенты должны сдѣлать побольше примѣровъ. Они должны провѣрить рядъ интеграловъ, данныхъ въ концѣ этой книги. Студентъ долженъ имѣть при себѣ насколько возможно полный рядъ интеграловъ. Онъ, конечно, не можетъ расчитывать запомнить ихъ всѣ. Иногда при дифференцированіи рекомендуется предварительно логариѳмировать обѣ части равенства, какъ, напримѣръ, въ слѣдующемъ случаѣ;

$$y=x^x;\ \log y=x\log x,$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=x\times\frac{1}{x}+\log x,$$

$$\frac{dy}{dx}=x^x(1+\log x).\ \dagger$$

215. Въ слѣдующихъ примѣрахъ буквы, подобныя x, y, z, v, w, θ и др., будутъ означать перемѣнныя количества, а буквы подобныя a, b, c, m, n, и т. д. постоянныя. Студентъ слишкомъ привыкаетъ къ x и y; поэтому пусть онъ

иногда, прежде, чѣмъ приступить къ дифференцированію, замѣнить x посредствомъ θ или t или v, тоже самое сдѣлаетъ и съ y. Онъ долженъ провѣрить рѣшеніе каждаго интеграла помощью дифференцированія.

Рядъ основныхъ случаевъ.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad \int x^m . dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1};$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}. dx = \log x;$$

$$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m \cos mx, \qquad \int \cos mx . dx = \frac{1}{m} \sin mx;$$

$$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m \sin mx \qquad \int \sin mx . dx = -\frac{1}{m} \cos mx;$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} ax) = \frac{a}{\cos^2 ax}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax;$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} ax) = -\frac{a}{\sin^2 ax}, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg} ax;$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a, \qquad \int a^x . dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

Многіе изъ указанныхъ интеграловъ даны были уже раньше и они только на первый взглядъ кажутся другими. Даже употребленіе $\sqrt{}$ и $\sqrt[3]{}$ вмѣсто численнаго обозначенія степени или корня можетъ замаскировать функцію для новичка. Такъ,

$$\frac{1}{a\sqrt[3]{x}} \text{ равно } \frac{1}{a} x^{-1/3},$$

и его интегралъ равенъ

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x^{-1/_3+1}}{-1/_3+1}\right)=\frac{3}{2a}x^{2/_3}.$$

216. Въ нѣкоторыхъ изъ помѣщенныхъ ниже интеграловъ указаны извѣстныя опредѣленныя **подстановки.** Студентъ не долженъ падать духомъ, если для него будетъ оставаться непонятнымъ, какимъ образомъ додумались до этихъ подстановокъ; онѣ явились плодомъ можетъ быть цѣлыхъ недѣль умственной работы прежнихъ и современныхъ математиковъ. Многія изъ нихъ были получены помощью пробъ тѣмъ же способомъ, какимъ мы уже пользовались, когда при интегрированіи брали отвѣтъ и провѣряли его правильность дифференцированіемъ.

Конечно при изученіи различныхъ пріемовъ дифференцированія и интегрированія, студентъ, имѣющій возможность взять нѣсколько уроковъ у преподавателя, имѣетъ большое преимущество передъ студентомъ, занимающимся самостоятельно по книгѣ. Однако усидчиво работающій безъ посторонней помощи студентъ тоже имѣетъ за собой нѣкоторыя преимущества; то, что онъ изучитъ, онъ усвоитъ хорошо и не забудетъ этого. Кто прошелъ по Англіи пѣшкомъ, имѣетъ нѣкоторыя преимущества передъ тѣмъ, кто путешествовалъ по ней по желѣзнымъ дорогамъ. Но, когда учатся ѣздить на велосипедѣ, то я думаю, первые дни полезно, если поддерживаютъ сзади; а обученіе велосипедной ѣздѣ имѣетъ нѣкоторое сходство съ обученіемъ пріемамъ дифференцированія и интегрированія.

Упражненія и примѣры.

1. $y=x\log x,\ \frac{dy}{dx}=1+\log x.$

2. $y=a\sqrt{x},\ \frac{dy}{dx}=\frac{a}{2\sqrt{x}}.$

3. $y=\log(\operatorname{tg} x),\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sin 2x}.$

4. $y=\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sec x},\ \ \frac{dy}{dx}=-(\sin x+\cos x).$

5. $y = \log(\operatorname{tg} x)$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \log x}$.

6. $x = e^{at} \sin bt$, $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2}\,.\ e^{at} \sin(bt + c)$,

гдѣ $$\operatorname{tg} c = \frac{b}{a}.$$

Здѣсь мы пользуемся тѣмъ же упрощеніемъ, какъ и въ п. 116. Студентъ долженъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что на основаніи п. 165 дѣйствіе θ (означающее $\dfrac{d}{dt}$), произведенное n разъ надъ $\sin bt$, увеличиваетъ его амплитуду въ b^n разъ и даетъ опереженіе фазы на n прямыхъ угловъ. Изъ даннаго примѣра можно видѣть, что если дѣйствіе θ произвести n разъ надъ $e^{at} \sin bt$, то амплитуда увеличится въ $(a^2 + b^2)^{n/2}$ разъ, а опереженіе фазы будетъ nc

Итакъ $$\frac{d^2x}{dt^2} = (a^2 + b^2)\, e^{at} \sin(bt + 2c);$$

и $$\frac{d^3x}{dt^3} = (a^2 + b^2)^{3/2} e^{at} \sin(bt + 3c).$$

7. $p = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-\theta}{1+\theta}}$, $\dfrac{dp}{d\theta} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}$.

8. $y = \log(e^z + e^{-z})$, $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{e^z - e^z}{e^z + e^z}$.

9. $y = \sqrt{x^3}$, $\dfrac{dy}{dx} = {}^3/_2 \sqrt{x}$.

10. $y = ax^2 + bx + c$, $\dfrac{dy}{dx} = 2ax + b$.

11. $v = 2t^3$, $\dfrac{dv}{dt} = 6t^2$.

12. $p = cv^{-1\cdot 37}$, $\dfrac{dp}{dv} = -1.37\, cv^{-2\cdot 37}$.

13. $\int e^{av}.\, dv = \dfrac{1}{a}\, \varepsilon^{av}$.

14. $\int av^{-1.37}\,dv = -\frac{a}{0.37}\,v^{-0.37}$.

15. $\int (at^2 + bt + c)\,dt = {}^1/_3\,at^3 + {}^1/_2\,bt^2 + ct + g$.

16. $\int \sqrt{x^3}\,.\,dx = \int x^{3/2}.dx = {}^2/_5 x^{5/2}$.

17. $\int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}.\,dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} = -{}^1/_2\,t^{-2}$ или $\frac{-1}{2t^2}$.

18. $\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \int t^{-1/3}.\,dt = \frac{t^{-1/3+1}}{-{}^1/_3+1} = {}^3/_2 t^{2/3}$.

19. $\int \frac{dx}{m+nx^2} = \frac{1}{n}\int \frac{dx}{\frac{m}{n}+x^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$†

или $$\frac{1}{\sqrt{mn}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

20. $\int \sqrt[3]{a+v}\,.dv$. Примемъ здѣсь $a+v=y$, тогда $dv=dy$, и мы получимъ $\int y^{1/3}.dy = {}^3/_4 y^{4/3} = {}^3/_4 (a+v)^{4/3}$

21. $\int \frac{t^3\,.\,dt}{(t+a)^m}$. Пусть $t+a=y$, $dt=dy$,

$$\int \frac{(y-a)^3}{y^m}\,dy = \int \frac{y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3}{y^m}\,dy =$$

$$= \int (y^{3-m} - 3ay^{2-m} + 3a^2y^{1-m} - a^3y^{-m})\,dy =$$

$$= \frac{y^{4-m}}{4-m} - 3a\frac{y^{3-m}}{3-m} + 3a^2\frac{y^{2-m}}{2-m} - a^3\frac{y^{1-m}}{1-m},$$

остается только подставить $t+a$ вмѣсто y.

22. $\int \frac{x\,.\,dx}{(a+bx)^{1/3}}$. Пусть $a+bx=y$, такъ что $b\,.\,dx=dy$,

$$\frac{1}{b^2}\int \frac{y-a}{y^{1/3}}.dy = \frac{1}{b^2}\left\{\int y^{2/3}dy - \int ay^{-1/3}\,dy\right\} = \frac{1}{b^2}({}^3/_5 y^{5/3} - {}^3/_2 y^{2/3})$$

$$= \frac{3}{b^2}[{}^1/_5(a+bx)^{5/3} - {}^1/_2\,(a+bx)^{2/3}].$$

23. $\int \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} . dt = -\sqrt{a^2-t^2}$, — очевидно.

24. $\int \frac{dx}{x-a}$. Пусть $x-a=y$, $dx=dy$,

$$\int \frac{dy}{y} = \log y = \log(x-a).$$

25. Такъ какъ $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$, то

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\log(x-a) - \log(x+a)\right] = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\log\frac{x-a}{x-b}.$$

26. Если $x^2+2Ax+B$ можетъ быть разложено на два дѣйствительныхъ множителя, то $\int \frac{dx}{x^2+2Ax+B}$ представится въ той же формѣ, какъ и предыдущій интегралъ.

Если же этого нѣтъ, то интегралъ можетъ быть написанъ въ видѣ $\int \frac{dx}{x^2+2Ax+A^2+B-A^2}$ и если $y=x+A$ и $a^2=B-A^2$, то мы получимъ интегралъ

$\int \frac{dy}{y^2+a^2}$, который равенъ $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}$.

27. $\int \operatorname{tg} x . dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$. Это у насъ первый примѣръ большого класса интеграловъ, въ которыхъ числитель дроби оказывается производной знаменателя. Пусть $y=\cos x$, тогда $dy=-\sin x . dx$, такъ что вышеприведенный интегралъ принимаетъ видъ $-\int \frac{dy}{y} = -\log y = -\log(\cos x)$.

28. Пусть $f'(x)$ изображаетъ собой производную $f(x)$ и намъ требуется найти $\int \frac{f'(x).dx}{f(x)}$. Пусть $f(x)=y$,

тогда $f'(x).dx = dy$, такъ что интегралъ принимаетъ видъ

$$\int \frac{dy}{y} = \log y = \log f(x),$$

Отсюда слѣдуетъ, что если числитель дроби оказывается производной знаменателя, то отвѣтъ будетъ:

log (знаменатель)

29. $$\int \frac{2bx.dx}{a+bx^2} = \log(a+bx^2).$$

30. $$\int \frac{x.dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\int \frac{2bx.dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log(a+bx^2).$$

31. Привести $\int \frac{(m+nx)dx}{a+bx+cx^2}$ къ болѣе простому виду. Если бы числитель былъ $2cx+b$, то интегралъ подходилъ бы подъ правилю прим. 28. Числитель можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\frac{n}{2c}(2cx+b)+m-\frac{nb}{2c},$$

такъ что можно написать интегралъ въ видѣ

$$\frac{n}{2c}\int \frac{2cx+b}{a+bx+cx^2}dx + \left(m-\frac{nb}{2c}\right)\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$$
$$= \frac{n}{2c}\log(a+bx+cx^2) + \left(m-\frac{nb}{2c}\right)\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}.$$

Послѣдній интегралъ данъ въ примѣрѣ 26.

32. $$\int \frac{x+b}{a^2+x^2}.dx = {}^1/_2\int \frac{2x.dx}{a^2+x^2} + \int \frac{b.dx}{a^2+x^2}$$
$$= {}^1/_2\log(a^2+x^2) + \frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

33. $$\int \frac{\sin x.dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\int \frac{-b\sin x.dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\log(a+b\cos x).$$

34. $$\int\frac{dx}{x.\log x}=\int\frac{1+\log x-\log x}{x\log x}\,dx$$

$$=\int\frac{(1+\log x)\,dx}{x\log x}-\int\frac{dx}{x}$$

$$=\log(x\log x)-\log x$$
$$=\log x+\log(\log x)-\log x$$
$$=\log(\log x).$$

Когда въ выраженія входятъ x^m и $(a+bx)^n$, то нужно пробовать подстановку $y=a+bx$ или $y=\frac{a}{x}+b$.

35. $$\int\frac{dx}{(a+bx)^2}=-\frac{1}{b(a+bx)}.$$

36. $$\int\frac{x.dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^2}\left\{\log(a+bx)+\frac{a}{a+bx}\right\}.$$

37. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}.$$

38. $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}=\frac{1}{2ma}\frac{x}{(a+bx^2)^m}$$
$$+\frac{2m-1}{2ma}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}$$

такимъ образомъ мы получаемъ **формулу приведенія.**

Когда выраженіе заключаетъ въ себѣ $\sqrt{a+bx}$, то слѣдуетъ пробовать $y^2=a+bx$.

39. Такъ, $\int\frac{x.dx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}.$

40. $\int\frac{1}{x}\sqrt{1+\log x}.dx$ Пробуемъ $y=1+\log x$.

Отвѣтъ: $^2/_3\,(1+\log x)^{3/2}$.

41. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. Пробуемъ $e^x=y$. Отвѣтъ: $\operatorname{arctg} e^x$.

217. Интегрированіе по частямъ. Если u и v суть функціи x, то

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

отсюда
$$uv = \int u\,.\,dv + \int v\,.\,du,$$

или
$$\int u\,.\,dv = uv - \int v\,.\,du \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

Мы можемъ написать (1) въ видѣ

$$\int u\,.\,\frac{dv}{dx}\,.\,dx = uv - \int v\,.\,\frac{du}{dx}\,.\,dx.$$

Посредствомъ этой формулы интегралъ $\int u\,.\,dv$ можетъ быть выраженъ черезъ $\int v\,.\,du$.

42. Такъ, напримѣръ, чтобы найти $\int x^n\,.\log x\,.\,dx$, примемъ $u = \log x$ и $\frac{dv}{dx} = x^n$, такъ что $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Формула (1) даетъ намъ $\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \int\frac{x^n}{n+1}\,dx$, или $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right)$.

43. $\int x\,.\,e^{ax}\,.\,dx$.

Пусть $u = x$; $\frac{dv}{dx} = e^{ax}$, такъ что $v = \frac{1}{a}e^{ax}$; тогда формула (1) дастъ $\int x\,.\,e^{ax}\,.\,dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,.\,dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\left(x - \frac{1}{a}\right).$$

44. $\int e^{ax}\,.\sin bx\,.\,dx$. Назовемъ отвѣтъ A.

Пусть $u = \sin bx$, $v = \frac{1}{a}\varepsilon^{ax}$, тогда формула (1) дастъ намъ

$$A = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}.\cos bx.dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}B;$$

подобнымъ же образомъ можетъ быть преобразованъ интегралъ $\int e^{ax}.\cos bx.dx$, который мы назвали B, если принять

$u = \cos bx$ и $v = \frac{1}{a}e^{ax}$;

тогда $B = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx.dx = \frac{1}{a}e^{ax}.\cos bx + \frac{b}{a}A.$

Отсюда $A = \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}A\right)$, такъ

что $A = \int e^{ax}\sin bx.dx = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.$

Подобнымъ же образомъ

$$B = \int e^{ax}\cos \mathrm{bx}.\mathrm{dx} = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}.$$

218. Посредствомъ **формулъ приведенія** мы постепенно приводимъ интегралы къ видамъ, уже извѣстнымъ намъ; эти формулы всегда получаются помощью метода интегрированія по частямъ. Такъ, напримѣръ,

$$\int x^n e^{ax}.dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}.e^{ax}.dx.$$

Если напримѣръ намъ нужно интегрировать x^4e^{ax}, то мы выражаемъ его черезъ x^3e^{ax}; затѣмъ, пользуясь формулой приведенія, выражаемъ x^3e^{ax} черезъ x^2e^{ax} и т. д., пока не приведемъ его къ x^0e^{ax} или e^{ax}, интегралъ котораго мы знаемъ.

Итакъ $\int x^3e^x.dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$

$$= x^3e^x - 3\left\{x^2e^x - 2\int xe^x.dx\right\}$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^x.dx\right)$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x.$$

Нѣкоторыя общія упражненія.

45. $y = a \sin^2 bx,\ \frac{dy}{dx} = ab \sin 2bx.$

46. $y = b \sin ax^n,\ \frac{dy}{dx} = bnax^{n-1} \cos ax^n.$

47. $y = (a + bx^n)^m,\ \frac{dy}{dx} = nbx^{n-1}m(a + bx^n)^{m-1}.$

48. $y = (a + bx)e^{cx},\ \frac{dy}{dx} = e^{cx}(b + ac + bcx).$

49. $y = a^x,\ \frac{dy}{dx} = a^x . \log a.$

50. $y = \log_a x,\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$

51. $v = \frac{a-t}{t},\ \frac{dv}{dt} = -\frac{a}{t^2}.$

52. $v = \sqrt{a^2 - t^2},\ \frac{dv}{dt} = -\frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$

53. $u = \frac{v^3}{(1-v^2)^{3/2}},\ \frac{du}{dv} = \frac{3v^2}{(1-v^2)^{5/2}}.$

54. $v = \frac{\sqrt{a+t}}{\sqrt{a}+\sqrt{t}},\ \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{t}-\sqrt{a})}{2\sqrt{t}\sqrt{(a+t)}(\sqrt{a}+\sqrt{t})^2}.$

55. $w = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}},\ \frac{dw}{dy} = 1 : [\sqrt{1-y^2} \cdot (1-y)].$

56. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2},\ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}.$

57. $y = \log(\sin x),\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x.$

58. $u = \log \sqrt{a^2 - t^2},\ \frac{du}{dt} = -\frac{t}{a^2 - t^2}.$

59. $y = \log \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}},\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sin t}.$

60. $y = \arcsin \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{1}{1+v^2}.$

61. $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}.$

62. $x = \operatorname{arcsec} t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}.$

63. $y = \sin(\log v), \quad \frac{dy}{dv} = \frac{1}{v} \cos(\log v).$

64. $p = \arcsin \frac{1-p^2}{1+p^2}, \quad \frac{dv}{dp} = \frac{-2}{1+p^2}.$

65. $y = \frac{1+x}{1+x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}.$

66. $p = \log(\operatorname{cotg} v), \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{2}{\sin 2v}.$

67. $s = e^t(1-t^3), \quad \frac{ds}{dt} = e^t(1-3t-t^3).$

68. $p = \frac{v^n}{(1+v)^n}, \quad \frac{dp}{dv} = \frac{nv^{n-1}}{(1+v)^{n+1}}.$

69. $x = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}.$

70. $p = \frac{\theta}{e^\theta - 1}, \quad \frac{dp}{d\theta} = \frac{e^\theta(1-\theta)-1}{(e^\theta-1)^2}.$

71. Пусть $x = \operatorname{tg}\theta + \sec\theta$, доказать, что $\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}.$

72. Пусть $x = \theta^2 \log\theta$, доказать, что $\frac{d^3x}{d\theta^3} = \frac{2}{\theta}.$

73. Пусть $y = e^{-x}\cos x$, доказать, что $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0.$

74. Пусть $y = \frac{x^3}{1-x}$, доказать, что $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24}{(1-x)^5}$.

75. $\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p|q}\,dx.$

(1). Если p/q цѣлое и положительное число, то слѣдуетъ произвести возведеніе въ степень, перемноженіе и интегрировать каждую часть отдѣльно.

(2). Принимаемъ $(a+bx^n)=y^q$; а если такая подстановка не приведетъ къ результатамъ, то

(3). Принимаемъ $(ax^{-n}+b)=y^q$.

76. $\int x^2(a+x)^{1/2}.dx$. Пусть $a+x=y^2$, тогда $dx=2y.dy$, и $x=y^2-a$, такъ что мы получимъ $2\int(y^4-2ay^2+a^2)y^2\,dy$ или $2\int(y^6-2ay^4+a^2y^2)\,dy$, что уже легко интегрируется.

77. $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^{1/2}}$. Пробуемъ $x^{-2}+1=y^2$, $\frac{1}{y^2-1}=x^2$, $-2x^{-3}.dx=2y.dy$, тогда получимъ

$$-\int dy = -y = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

78. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$. Пробуемъ $a^2x^{-2}+1=t^2$, и находимъ

$$-\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{a^2t}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

79. Пусть $x=A\sin nt+B\cos nt$, доказать, что $\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0$.

80. Пусть $u=xy$, доказать, что $\frac{d^nu}{dx^n}=x\frac{d^ny}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

81. Доказать справедливость положенія $\frac{d^2u}{dy\,.\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,.\,dy}$ (**см.** п. 83) на слѣдующихъ примѣрахъ:

$$u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ u=\sin\,(ax^n+by^n),$$

$$u=\sin\,(x^2y),\ u=x\,\sin y+y\,\sin x,$$

$$u=bx^2\,\log\,ay,\ u=\log\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$$

$$u=\frac{ay^2-bx}{by-ax^2},\ u=xy\log\,(1+x^2y^2).$$

$$u=\frac{x^2y}{a^2-y^2}.$$

82. $y=e^{ax}\sin^m bx,\ \frac{dy}{dx}=e^{ax}\sin^{m-1}bx(a\sin bx+mb\cos bx).$

83. $x=e^{-at}\cos bt,\ \frac{d^nx}{dt^n}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{-at}\cos\,(bt-n\theta)$, гдѣ

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}.$$

84. $y=x^4\log x,\ \frac{d^6y}{dx^6}=-\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{x^2}.$

85. $y=\log\,(\sin x),\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$

86. Если $v=A_1x^{a_1}y^{b_1}+A_2x^{a_2}y^{b_2}+$ и т. д., гдѣ

$$a_1+b_1=a_2+b_2 \text{ и т. д.} =n,$$

то v называется однородной функціей x и y n—аго измѣренія. Доказать, что $x\left(\frac{dv}{dx}\right)+y\left(\frac{dv}{dy}\right)=nv$. Провѣрить это для случая $v=\frac{xy}{x+y}$ и $v=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

87. Вообще, если $u=f(y+ax)+F(y-ax)$, гдѣ f и F суть какія нибудь функціи, доказать, что

$$\frac{d^2u}{dx^2}=a^2\,\frac{d^2u}{dy^2},$$

причемъ, разумѣется, должны быть взяты частныя производныя.

88. Пусть $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, доказать что

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

89. Пусть $s = ae^{-at} \sin \beta t$ удовлетворяетъ уравненію

$\frac{d^2s}{dt^2} + 2f\frac{ds}{dt} + n^2 s = 0$, найти f и n^2 въ зависимости отъ α и β или α и β выразить черезъ f и n^2.

90. Пусть $y = e^{ax}$ есть рѣшеніе уравненія

$$\frac{d^4y}{dx^4} + A\frac{d^3y}{dx^3} + B\frac{d^2y}{dx^2} + C\frac{dy}{dx} + Dy = 0,$$

Найти α. Какъ примѣръ, возьмемъ

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0,$$

и найдемъ его рѣшеніе.

Отвѣтъ: $y = ae^x + be^{-x} + ce^{2x} + d$, гдѣ a, b, c, d суть нѣкоторыя произвольныя постоянныя.

219. Пусть требуется интегрировать дробь вида

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{и т. д.}}{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{и т. д.}} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

гдѣ m и n цѣлыя и положительныя числа.

Если m больше или равно n, то производимъ дѣленіе и получаемъ нѣкоторое частное и остатокъ. Частное сразу интегрируется и намъ остается имѣть дѣло съ остаткомъ— дробью вида (1), въ которой m меньше n. Далѣе, можно всегда найти множитель знаменателя и разложить дробь на простѣйшія дроби.

Положимъ, что каждому множителю знаменателя вида $x - \alpha$ соотвѣтствуетъ частная дробь $\frac{A}{x - \alpha}$. Каждому множителю вида $x^2 + \alpha x + \beta$, положимъ, соотвѣтствуетъ частная дробь вида $\frac{Ax + B}{x^2 + \alpha x + \beta}$; если же есть n равныхъ мно-

жителей вида $x-\alpha$, то, положимъ, что имъ будутъ соотвѣтствовать частныя дроби

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^n}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{n-1}}+\ldots\ldots$$

Такъ, предположимъ, что мы имѣемъ дѣло съ дробью, которую мы обозначимъ $\frac{f(x)}{F(x)}$, и что $F(x)$ распадается на множителей $x-\alpha$, $x-\beta$, x^2+ax+b, $(x-\gamma)^n$; мы пишемъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{Cx+D}{x^2+ax+b}+\frac{E}{(x-\gamma)^n}$$
$$+\frac{G}{(x-\gamma)^{n-1}}+\ldots\ldots \quad (2).$$

Далѣе умножаемъ на $F(x)$ все равенство и мы можемъ опредѣлить A, B, C, D, E, F, G, и т. д. или слѣдуя опредѣленнымъ правиламъ, или пользуясь самыми простыми соображеніями. Замѣтимъ, что, такъ какъ мы имѣемъ тождество, т. е. уравненіе, которое справедливо при любомъ значеніи x, то оно будетъ справедливо, и въ томъ случаѣ, если мы положимъ $x=\alpha$, или $x=\beta$, или $x=\gamma$, или $x^2+ax+b=0$. Подставляя всѣ эти величины въ равенство, мы получимъ A, B, C, E и D. Чтобы найти G, мы можемъ продифференцировать наше тождество и тогда положить $x=\gamma$ и т. д. Вы убѣдитесь, что вамъ будетъ труднѣе понять это описаніе, чѣмъ дѣйствительно выполнить самый процессъ. Когда же данная дробь разложена на простѣйшія, интегрировать ее легко.

91. $$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Отсюда

$$x^2=A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Пусть $x^2+1=0$, тогда легко найти, что $C=-{}^1/_2$, $D=0$. Положимъ $x=1$, и имѣемъ $A={}^1/_2$. Чтобы найти B, принимаемъ $x=0$, и находимъ $B={}^1/_2$. Отсюда мы имѣемъ для интегрированія

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}.$$

и отвѣтъ будетъ такой

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+{}^1/_2\log(x-1)-{}^1/_4\log(x^2+1).$$

Когда есть r равныхъ множителей второго измѣренія, мы беремъ частныя дроби вида

$$\frac{C_1x+D_1}{(x^2+\alpha x+\beta)^r}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^{r-1}}+\ldots\ldots$$

Не трудно понять, какъ въ этомъ случаѣ опредѣлить всѣ постоянныя.

Въ нашей практической дѣятельности рѣдко, конечно, приходится имѣть дѣло съ сложными случаями.

92. Взять интегралъ $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$ или $\dfrac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)}$;

Примемъ эту дробь равной $\dfrac{M}{x}+\dfrac{N}{x+3}+\dfrac{P}{x-2}$;

Такимъ образомъ $x^2+x-1=M\ (x+3)\ (x\ -2)+Nx\ (x-2)+Px\ (x+3)$.

Такъ какъ это равенство справедливо при любомъ значеніи x, то положимъ $x=2$ и находимъ P, примемъ $x=0$ и находимъ M, примемъ $x=-3$, и находимъ N.

Итакъ мы найдемъ, что данная дробь распадается на

$$\frac{1}{6}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-2};$$

а интегралъ ея равенъ

$${}^1/_6\log x+{}^1/_3\log(x+3)+{}^1/_2\log(x-2).$$

93. $$\int\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\int\left(5x+15+\frac{35x-29}{x^2-3x+2}\right)dx$$

$$=\int\left(5x+15-\frac{6}{x-1}+\frac{41}{x-2}\right)dx$$

$$=\frac{5x^2}{2}+15x-6\log(x-1)+41\log(x-2).$$

94. $\int \frac{x^5}{x^3 - 7x - 6} dx$

$$= \int \left(x^2 + 7 + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{32}{5} \frac{1}{x+2} + \frac{343}{20} \frac{1}{x-3} \right) dx.$$

95. $\int \frac{x\,.\,dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$

$$= {}^1/_2 \operatorname{arctg} x + {}^1/_4 \log(1 + x^2) - {}^1/_2 \log(1 + x).$$

96. $\frac{9x^2 + 9x - 128}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{(x-3)^2} + \frac{B_2}{x-3}$,

и мы находимъ $A = -8$. $B_1 = -5$, $B_2 = 17$; такъ что интегралъ равенъ

$$-8 \log(x+1) + \frac{5}{x-3} + 17 \log(x-3).$$

97. $\int \frac{x\,.\,dx}{x^2 + 2x - 3} = {}^3/_4 \log(x+3) + {}^1/_4 \log(x-1).$

98. $\int \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = {}^1/_3 \operatorname{arctg} x - {}^1/_6 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$

99. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3 + x^2 - 2x} = -{}^3/_2 \log x + {}^5/_8 \log(x-1) -$

$- {}^1/_6 \log(x+2).$

100. $\int \frac{x^2}{x^4 - x^2 - 12} dx = \frac{\sqrt{3}}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + {}^1/_7 \log \frac{x-2}{x+2}.$

101. $\int \frac{x\,.\,dx}{(1+x)(1+x^2)} = {}^1/_2 \log \frac{1+x^2}{(1+x)^2} + {}^1/_2 \operatorname{arctg} x.$

102. $\int \frac{x\,.\,dx}{x^2 + 2x - 3} = {}^3/_4 \log(x+3) + {}^1/_4 \log(x-1).$

103. $\int \frac{x^3\,.\,dx}{x^2 + 6x + 8} = \frac{x^2}{2} - 6x + 32 \log(x+4) - 4 \log(x+2).$

104. $\int \frac{x\,.\,dx}{x^2 - x - 2} = {}^2/_3 \log(x-2) + {}^1/_3 \log(x+1).$

105. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x-3)(x+2)} = {}^2/_5 \log(x-3) + {}^3/_5 \log(x+2).$

106. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+8}={}^1/_2\log\frac{x+2}{x+4}.$

107. $\displaystyle\int\frac{(2x-5)\,dx}{(x+3)(x+1)^2}=-\frac{7}{2(x+1)}+{}^{11}/_4\log\frac{x+1}{x+3}.$

108. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

109. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+3}={}^1/_2\log\frac{x+1}{x+3}.$

110. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x-12}={}^1/_7\log\frac{x-3}{x+4}.$

111. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\operatorname{arctg}(x+2).$

112. $\displaystyle\int\frac{dx}{1-2x+2x^2}\operatorname{arctg}(2x-1).$

220. Maxima и minima. Если мы начертимъ какую либо кривую, имѣющую maximum и minimum, а также начертимъ кривую, показывающую значеніе $\frac{dy}{dx}$ въ первой кривой, то мы замѣтимъ, что: — гдѣ y maximum, $\frac{dy}{dx}=0$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ — отрицательно, а гдѣ y minimum, $\frac{dy}{dx}=0$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ положительно. Этимъ свойствомъ мы пользуемся въ случаѣ, если нѣтъ другого болѣе легкаго способа для рѣшенія различныхъ практическихъ примѣровъ.

Замѣтимъ, что то, что мы здѣсь называемъ maximum'омъ y обозначаетъ, что y постепенно возрастаетъ до этой величины, а потомъ уменьшается; y можетъ имѣть нѣсколько maximum'овъ и minimum'овъ, когда кривая имѣетъ волнистый характеръ. Замѣтимъ, что $\frac{dy}{dx}$ можетъ быть 0 и $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, такъ что въ данномъ случаѣ нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а, именно, когда y перестаетъ возрастать и затѣмъ снова начинаетъ возрастать. (См. М. фиг. 6).

1. Найти maximum и minimum $\frac{x}{x^2+1}$.

Отвѣтъ: $^1/_2$ и $-^1/_2$.

2. Найти наибольшее значеніе $\frac{x}{(a^2+x)(b^2+x)}$.

Отвѣтъ: $\frac{1}{(a+b)^2}$.

3. Доказать, что $a \sec\theta + b \operatorname{cosec}\theta$ minimum, когда

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

4, Когда $\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$ maximum? Отвѣтъ: при $x = {}^{12}/_5$.

5. Когда $x^m (a-x)^n$ дѣлается maximum или minimum?

Отвѣтъ: при $x = \frac{ma}{m+n}$, maximum.

6. Данъ уголъ C въ треугольникѣ; доказать, что $\sin^2 A + \sin^2 B$ становится maximum, а $\cos^2 A + \cos^2 B$ minimum, когда $A = B$.

7. $y = a \sin x + b \cos x$. Каковъ maximum и minimum y? Отвѣтъ: maximum $y = \sqrt{a^2+b^2}$; minimum $y = -\sqrt{a^2+b^2}$.

8. Найти maximum значенія $a \operatorname{tg}\theta + b \operatorname{cotg}\theta$.

Отвѣтъ: $2\sqrt{ab}$.

9. Найти maximum и minimum $\frac{x^2+2x+11}{x^2+4x+10}$.

Отвѣтъ: maximum 2 и minimum $^5/_6$.

Студенты должны вычертить функцію въ видѣ кривой на клѣтчаткѣ.

10. Найти maximum и minimum $\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$.

Отвѣтъ: maximum — 1.

11. Найти значенія x, которыя дѣлаютъ $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$ maximum'омъ и minimum'омъ.

Отвѣтъ: $x=4$ дѣлаетъ maximum; $x=16$ дѣлаетъ minimum.

12. Какое значенiе c сдѣлаетъ v maximum, если $v=\frac{1}{c}\log c$?

Отвѣтъ: $c=e$.

13. Если $p=\frac{(a+t)(b+t)}{t}$, то $t=\sqrt{ab}$ дѣлаетъ p maximum'омъ.

14. $x=\frac{\sin^3\theta}{1-\cos\theta}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ дѣлаетъ x maximum.

15. Какое значенiе c сдѣлаетъ v minimum, если

$$v=\frac{2}{1+c-c^2}$$ Отвѣтъ: $c={}^1/_2$.

16. Когда $4x^3-15x^2+12x-1$ maximum или minimum?
Отвѣтъ: при $x={}^1/_2$ maximum, при $x=2$ minimum.

17. $\operatorname{tg}^m x\operatorname{tg}^n(a-x)$ maximum тогда, когда

$$\operatorname{tg}(a-2x)=\frac{n-m}{m+n}\operatorname{tg}a.$$

18. $s=\frac{3t}{9+t^2}$, $t=3$ maximum; $t=-3$ minimum.

19. Данъ вертикальный уголъ треугольника и его площадь, найти условiя, при которыхъ его основанiе будетъ minimum.

20. Для **динамомашины** мы имѣемъ уравненiе

$$E=\frac{aC}{1+sC}\quad\ldots\ldots\ldots(1).$$

гдѣ a есть число пропорцiональное угловой скорости арматуры, при этомъ a и s зависятъ отъ формы, отъ числа оборотовъ и т. д. E есть электродвижущая сила арматуры въ вольтахъ, а C—сила тока въ амперахъ. Если r есть внутреннее сопритивленiе динамо въ омахъ, а R внѣшнее сопротивленiе, то

$$C=\frac{E}{r+R}\quad\ldots\ldots\ldots(2),$$

и работа машины будетъ

$$P=C^2R\quad\ldots\ldots\ldots(3)$$

При какой величинѣ R, P будетъ maximum?

Изъ (2) и (1) мы получимъ $\frac{aC}{1+sC}\cdot\frac{1}{r+R}=C.$

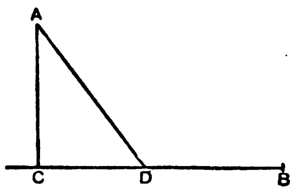
Такъ что $1+sC=\frac{a}{r+R}$, $C=\frac{1}{s}\left(\frac{a}{r+R}-1\right)$

$$P=\frac{R}{s^2}\left(\frac{a}{r+R}-1\right)^2 \text{ и, если } \frac{dP}{dR}=0,$$

то $\left(\frac{a}{r+R}-1\right)^2+2R\left(\frac{a}{r+R}-1\right)\left(-\frac{a}{(r+R)^2}\right)=0.$

Отбрасывая рѣшеніе $\frac{a}{r+R}-1=0$, такъ какъ оно даетъ $C=0$, мы получимъ $\frac{a}{r+R}-1=\frac{2Ra}{(r+R)^2}$, и отсюда, если даны a и r, можно опредѣлить R. Возьмите $a=1.2$, $s=0.03$, $r=0.05$ и поясните эту задачу помощью кривыхъ.

21. Нѣкто находится въ морѣ въ пунктѣ, отстоящемъ на разстояніи 4 миль отъ ближайшей точки на прямомъ берегу и онъ желаетъ попасть въ пунктъ, находящійся на берегу же на 10 миль отъ ближайшей точки, считая по направленію берега. Онъ можетъ и плыть на веслахъ и идти пѣшкомъ. Найти, въ какой точкѣ онъ долженъ высадиться на берегъ, чтобы попасть въ желаемый пунктъ съ наименьшей затратой времени, если онъ на веслахъ проплыветъ 3 мили въ часъ, а пѣшкомъ можетъ пройти 4 мили въ часъ. Предположимъ, что онъ можетъ съ одинаковымъ удобствомъ оставить свою лодку на берегу въ любомъ пунктѣ.



Черт. 100.

$AC=4$, $CB=10$. Пусть онъ причалитъ въ D, при чемъ CD обозначимъ черезъ x. Тогда $AD=\sqrt{16+x^2}$ и $DB=10-x$. Отсюда полный промежутокъ времени въ часахъ $=\frac{\sqrt{16+x^2}}{3}+\frac{10-x}{4}$.

Эта величина будетъ минимумомъ тогда, когда $\frac{1}{3}x(16+x^2)^{-1/2}=\frac{1}{4}$ или $\frac{16}{9}x^2=16+x^2$ отсюда $x=4.535$ миль.

22. Для одного рода электрическихъ **лампочекъ накаливанія** опытнымъ путемъ было найдено, что сила свѣта въ свѣчахъ $c\times$ на продолжительность горенія l въ часахъ въ среднемъ равна

$$lc=10^{11.697-0.07545v},$$

гдѣ v — разность потенціаловъ въ вольтахъ. Количество уаттовъ на свѣчу оказалось равнымъ

$$w=3{\cdot}7+10^{8.007-0.07667v}.$$

Цѣна лампы 0 1 фунта стерлинговъ, лампы горятъ 560 часовъ въ году и стоимость одной электрической лошадиной силы (или 746 уаттовъ) за этотъ промежутокъ времени равна 2 фунта; найти для этихъ лампъ наивыгоднѣйшее v такъ, чтобы общая стоимость лампъ и энергіи была наименьшая.

Въ годъ потребуется $\frac{560}{l}$ лампъ, причемъ каждая стоитъ 0.1 фунта. Полное количество ихъ въ годъ обойдется въ $\frac{56}{l}$ фунтовъ; эта стоимость соотвѣтствуетъ силѣ свѣта въ c свѣчей, такъ что на одну свѣчу стоимость будетъ $\frac{56}{lc}$. 1 фунтъ въ годъ соотвѣтствуетъ количеству $\frac{746}{2}$ уаттовъ, такъ что въ уаттахъ стоимость одной свѣчи въ годъ будетъ

$$\frac{56}{lc}\times\frac{746}{2}\text{ уаттовъ.}$$

Если сюда прибавить w уаттовъ, то получимъ общую стоимость въ уаттахъ. lc и w суть функціи v. Отсюда надо искать minimum

$$\frac{56\times 746}{2}.\,10^{-11.697+0.07545v}+3.7+10^{8.007-0.07667v}$$

Отвѣтъ: $v=101.15$ вольтъ.

221. Иногда функція при данномъ частномъ значеніи x принимаетъ **неопредѣленную форму**. Такъ, напр., въ п. 43 площадь кривой $y = mx^{-n}$ между ординатами при $x = a$ и $x = b$, была равна $\int_a^b mx^{-n} . dx$, или $\frac{m}{1-n}(b^{1-n} - a^{1-n})$.

При $n = 1$ площадь эта обращается въ $\frac{m}{1-1}(1-1) = \frac{0}{0}$, то есть принимаетъ неопредѣленный видъ. Если мы имѣемъ подобный случай, напр., дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$, въ которой $f(a) = 0$ и $F(a) = 0$, то поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Беремъ значеніе для x весьма близкое къ a и находимъ предѣльное значеніе нашего выраженія по мѣрѣ приближенія x къ a. Итакъ пусть $x = a + \delta x$. По мѣрѣ уменьшенія δx, очевидно, что $f(x + \delta x)$ все болѣе приближается къ $f(x) + \delta x . \frac{df(x)}{dx}$. Если въ этомъ выраженіи мы примемъ $x = a$, то $f(x)$ или $f(a)$ исчезаетъ, слѣдовательно, наша дробь $\frac{f(a + \delta x)}{F(a + \delta x)}$ все болѣе приближается къ значенію

$$\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}F(x)}$$

Итакъ, примѣняется слѣдующее правило: дифференцируютъ отдѣльно числитель и знаменатель и въ полученную дробь подставляютъ данное значеніе x, такимъ образомъ получаютъ истинное значеніе даннаго выраженія. Процессъ этотъ иногда приходится и повторять.

Примѣръ: 1. Найти значеніе выраженія $\frac{\log x}{x - 1}$ при $x = 1$.

Дѣлаемъ первую подстановку и получаемъ $0/0$. Далѣе, слѣдуя вышеприведенному правилу, получимъ $\frac{\frac{1}{x}}{1}$ и, подставляя въ это выраженіе $x = 1$, получаемъ 1.

2. Найти $\dfrac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ при $x = c$.

Сначала подставляемъ $x = c$ и получаемъ $0/0$.

Далѣе дѣлаемъ подстановку въ $\dfrac{2ax - 2ac}{2bx - 2bc}$ и снова получаемъ $0/0$.

Далѣе, повторяя нашъ процессъ, получаемъ $\dfrac{a}{b}$.

3. Найти $\dfrac{x - 1}{x^n - 1}$ при $x = 1$. Отвѣтъ: $\dfrac{1}{n}$.

4. Найти $\dfrac{a^x - b^x}{x}$ при $x = 0$. Отвѣтъ: $\log \dfrac{a}{b}$.

5. Разберемъ примѣръ, указанный выше. Площадь кривой равна $\dfrac{m}{1-n}(b^{1-n} - a^{1-n}) = A$. Если m, b, a постоянныя, то каково A при $n = 1$? Написавъ это выраженіе въ видѣ

$$m\frac{b^{1-n} - a^{1-n}}{1-n},$$

дифференцируемъ числитель и знаменатель относительно n, и, такъ какъ

$$\frac{d}{dn}(b^{1-n}) = b^{1-n}.\log b \times (-1),$$

то получимъ $\quad m\,\dfrac{b^{1-n}\log b - a^{1-n}\log a}{1}$,

и, если мы въ это выраженіе подставимъ $n = 1$, то получимъ

$$m(\log b - \log a) \text{ или } m\,\log\frac{b}{a}.$$

Отвѣтъ этотъ мы получили бы гораздо скорѣе, если бы взамѣнъ того, чтобы примѣнять къ нашему интегралу $\int x^{-1}.dx$ правило

$$\int x^{-n}.dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c,$$

вспомнили бы, что въ этомъ частномъ случаѣ

$$\int x^{-1} . dx = \log x.$$

222. † *Объясненія терминовъ и упражненія.*

Ассимптота. Прямая линія, которая по мѣрѣ увеличенія x и y все болѣе приближается къ кривой. Такъ $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ есть гипербола. Далѣе, такъ какъ при постепенномъ увеличиваніи x величина $\frac{a}{x}$ становится все меньше, то уравненіе это приближается все болѣе и болѣе къ $y = \frac{b}{a}x$, которое и есть уравненіе ассимптоты.

Отличительнымъ признакомъ ассимптоты служитъ то, что $\frac{dy}{dx}$ имѣетъ нѣкоторое предѣльное значеніе для точекъ безконечно удаленныхъ, такое же предѣльное конечное значеніе имѣютъ величины отрѣзковъ между началомъ координатъ и точками пересѣченія касательной съ осью x-овъ, $x - y\frac{dx}{dy}$, и съ осью y-овъ, $y - x\frac{dy}{dx}$.

Точка перегиба. Это — точка, въ которой $\frac{d^2y}{dx^2}$ мѣняетъ знакъ.

Точка соприкасанія. Точка, въ которой существуетъ два или болѣе равныхъ значеній $\frac{dy}{dx}$.

Точка возврата (заостренія). Гдѣ двѣ вѣтви кривой встрѣчаются, имѣя одну общую касательную.

Уединенная точка. Отдѣльно расположенная точка, координаты которой удовлетворяютъ уравненію кривой.

Точка перерыва. Точка, въ которой отдѣльная вѣтвь кривой обрывается.

Спутникъ циклоиды $x = a(1 - \cos\varphi)$, $y = a\varphi$.

Епитрохоида. $x = (a + b)\cos\varphi - mb\cos\left(\frac{a}{b} + 1\right)\varphi,$

$$y = (a + b)\sin\varphi - mb\sin\left(\frac{a}{b} + 1\right)\varphi,$$

гдѣ b есть радіусъ катящагося круга, a радіусъ закрѣпленнаго круга и mb — разстояніе положенія точки по направленію радіуса отъ центра катящагося круга. Если $m = 1$, то получается эпициклоида.

Гипотрохоида. $x = (a - b)\cos\varphi + mb\cos\left(\frac{a}{b} - 1\right)\varphi,$

$$y = (a - b)\sin\varphi - mb\sin\left(\frac{a}{b} - 1\right)\varphi.$$

Примемъ $m = 1$ и мы получаемъ гипоциклоиду.

Если $a = 4b$, то получается гипоциклоида, имѣющая уравненіе

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Примемъ $a = 2b$ и мы получимъ гипоциклоиду въ видѣ прямой линіи.

Положимъ, что при полученіи циклоиды (см. п. 11) точка, вычерчивающая кривую, находится гдѣ либо на радіусѣ катящагося круга, иначе говоря, на производящемъ радіусѣ, тогда мы получимъ $x = a(1 - m\cos\varphi)$, $y = a(\varphi + m\sin\varphi)$. Если $m > 1$ или < 1, то мы будемъ имѣть или растянутую, или сжатую циклоиду.

Лемниската. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ въ полярныхъ координатахъ принимаетъ видъ $r^2 = a^2\cos 2\theta$; принимая последовательно $\theta = 0$, $\theta = 0.1$, и т. д. мы получимъ r и легко вычертимъ кривую.

Архимедова спираль. $r = a\theta$.

Логариѳмическая или **равноугольная спираль.** $r = ae^{b\theta}$.

Логариѳмическая кривая. $y = a\log bx + c$.

Конхоида. $x^2y^2 = (a + x)^2(b^2 - x^2)$, имѣетъ также видъ

$$r = a + b\sec\theta.$$

Циссоида. $y^2 = x^3 : (2a - x)$ имѣетъ также видъ

$$r = 2a\operatorname{tg}\theta . \sin\theta.$$

Кардіоида. $r = a(1 - \cos\theta)$.

Гиперболическая спираль. $r\theta = a$.

Lituus. $r^2\theta = a^2$.

Trisectrix. $r = a\,(2\cos\theta \pm 1)$.

1. Доказать, что въ кривой $y = \dfrac{a^2x}{a^2+x^2}$ имѣются точки перегиба при $x=0$ и $a\sqrt{3}$, ось x-овъ является ассимптотой для обѣихъ сторонъ кривой; максимумы соотвѣтствуютъ точкамъ $x=a$ и $x=-a$; кривая пересѣкаетъ ось x-овъ подъ угломъ 45^0.

2. Показать, что въ кривой $a^2y = 3bx^2 - x^3$ точка перегиба при $x=b$ и $y=\dfrac{2b^3}{a^2}$.

3. Если $y^2x = 4a^2\,(2a - x)$, то показать, что есть двѣ точки перегиба, при $x=\dfrac{3a}{2}$, $y = \pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

4. Если $y^2\,(x^2-a^2) = x^4$, то показать, что уравненія ассимптотъ суть $y=+x$ и $y=-x$.

5. Кривая $x^3 - y^3 = a^3$ пересѣкаетъ ось x-овъ подъ прямымъ угломъ въ точкѣ $x=a$, которая является точкой перегиба.

6. Показать, что кривая $y = \dfrac{a^2x}{(ab+x^2)}$ имѣетъ три точки перегиба.

7. Доказать вновь выводы, сдѣланные во 2-мъ упражненіи п. 99, и сдѣлать помѣщенные тамъ примѣры.

8. Найти подкасательную и поднормаль къ кривой $y = e^{ax}$.

Отвѣтъ: подкасательная $\dfrac{1}{a}$, поднормаль ae^{2ax}.

9. Найти поднормаль и подкасательную къ цѣпной линіи

$$y = \frac{c}{2}\left\{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right\}.$$

Отвѣтъ: поднормаль $= \dfrac{c}{4}\left\{e^{\frac{2x}{c}} + e^{-\frac{2x}{c}}\right\}$.

$$\text{подкасательная} = c\,\frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}.$$

10. Найти подкасательную къ кривой

$$x^3 - 3ayx + y^3 = 0,$$

$$3x^2 - 3ay - 3ax\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Подкасательная въ точкѣ x, y есть $y\dfrac{dx}{dy} = y\dfrac{y^2 - ax}{ay - x^2}$.

11. По уравненію кривой $y^2 = \dfrac{x^3 + ax^2}{x - a}$ найти уравненіе ассимптоты къ ней. Здѣсь имѣемъ

$$y^2 = x^2\left\{\frac{1 + \frac{a}{x}}{1 - \frac{a}{x}}\right\} = x^2\left(1 + \frac{2a}{x} + \frac{2a^2}{x^2} + \ldots\ldots\right),$$ если произвести дѣленіе.

Такъ какъ, по мѣрѣ увеличенія x, $\dfrac{2a}{x}$ и т. д. становятся все меньше и меньше, то въ предѣлѣ имѣемъ (см. п. 3)

$$y = \pm x\left(1 + \frac{a}{x}\right),$$

$$y = \pm(x + a).$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ пару ассимптотъ $y = x + a$, $y = -x - a$.

Далѣе прямая линія $x = a$, параллельная оси y'овъ, есть также асимптота, такъ какъ, чѣмъ больше становится y, тѣмъ ближе x приближается къ значенію a.

12. Найти касательную къ $y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$.

$$^2/_3 y^{-1/3}\frac{dy}{dx} + {}^2/_3 x^{-1/3} = 0,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Отсюда уравненіе касательной въ точкѣ x_1, y_1 есть
$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}}$.

13. Въ какихъ точкахъ кривой $y-2=(x-1)\sqrt{x-2}$, $\frac{dy}{dx}$ равно ∞?

Подъ какимъ угломъ кривая пересѣкаетъ ось x-овъ?

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x-2}+(x-1)\,{}^1/_2\,(x-2)^{-1/_2}=\frac{3x-5}{2\sqrt{x-2}}.$$

Это выраженіе обращается, въ безконечность, при $x=2$, и слѣдовательно $y=2$. Т. е. касательная въ точкѣ $(2, 2)$ пересѣкаетъ ось x-овъ подъ прямымъ угломъ. При $y=0$, $x=3$ и $\frac{dy}{dx}=2$.

14. Найти отрѣзокъ отсѣкаемый касательной на оси y'овъ, т. е. найти $y-x\frac{dy}{dx}$ для кривой $y^3=ax^2+x^3$;

$$3y^2\frac{dy}{dx}=2ax+3x^2,$$

слѣдовательно, намъ нужно получить $y-x\,\frac{2ax+3x^2}{3y^2}$ или $\frac{3y^3-2ax^2-3x^3}{3y^2}$, а это можетъ быть выражено въ видѣ $\frac{a}{3}\left(\frac{x}{x+a}\right)^{2/_3}$.

15. Длина поднормали въ точкѣ x, y равна $2a^2x^3$, какая это кривая?

Здѣсь $y\frac{dy}{dx}=2a^2x^3$. Отсюда ${}^1/_2y^2={}^1/_2a^2x^4$ или $y=ax^2$,— это уравненіе параболы. Подкасательная равна $y\frac{dx}{dy}$, или $y\cdot\frac{y}{2a^2x^3}=\frac{a^2x^4}{2a^2x^3}={}^1/_2\,x$.

16. Показать, что длина нормали къ цѣпной линіи равна $\frac{1}{c} y^2$.

17. Показать что $y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0$ имѣетъ двѣ ассимптоты $y = x - \frac{b}{2}$ и $y = -x - \frac{b}{2}$.

18. Показать, что подкасательная и поднормаль къ окружности $y^2 = 2ax - x^2$, суть $\frac{2ax - x^2}{a - x}$ и $a - x$, а къ эллипсу

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, онѣ равны $\frac{2ax - x^2}{a - x}$ и $\frac{b^2}{a^2}(a - x)$.

19. Найти касательную къ циссоидѣ $y^3 = \frac{x^3}{2a - x}$.

$$\text{Отвѣтъ: } y = \left\{\frac{x}{(2a - x)^3}\right\}^{1/2} [(3a - x)x_1 - ax].$$

20. Какая кривая имѣетъ постоянную подкасательную? $y \frac{dx}{dy} = a$, или $dx = a \frac{dy}{y}$, или $x = a \log y + c$, или $y = Ce^{\frac{x}{a}}$, — логариѳмическая кривая.

21. Показать, что $x^3 - y^3 + ax^2 = 0$ имѣетъ ассимптоту

$$y = x + \frac{a}{3}.$$

22. Показать, что кривая обращена **выпуклостью или вогнутостью** по отношенію къ оси x въ зависимости отъ того, имѣютъ ли y и $\frac{d^2y}{dx^2}$ одинаковые или противоположные знаки. См. п. 60.

223. Кругъ, который проходитъ черезъ точку на кривой и имѣетъ тотъ же уклонъ, что и кривая въ данной точкѣ и ту же степень измѣненія уклона, называется **кругомъ кривизны** въ данной точкѣ. Если центръ круга имѣетъ координаты a и b и радіусъ r, то легко видѣть, что уравненіе его будетъ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Дифференцируя (1) и дѣля его на 2 и дифференцируя вновь, имѣемъ

$$x - a + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

и

$$1 + (y - b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

Написавъ p вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ и q вмѣсто $\frac{d^2y}{dx^2}$, имѣемъ изъ (3)

$$y - b = -\frac{1+p^2}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

подставляя это значеніе y — во (2), имѣемъ

$$x - a = \frac{1+p^2}{q}p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Такъ какъ въ любой точкѣ кривой p, q, x и y извѣстны и мы знаемъ, что они будутъ тѣже и для точки круга кривизны, то a, b и r могутъ быть найдены. Еслибы вопросъ объ эволютахъ былъ интересенъ для инженеровъ, то здѣсь было бы умѣстно поговорить объ нахожденіи уравненія, связывающаго a и b, такъ какъ это уравненіе и есть уравненіе эволюты кривой. Сама кривая тогда должна называться инволютой по отношенію къ эволютѣ. Кто желаетъ, можетъ самостоятельно рѣшить этотъ вопросъ. Большаго интереса заслуживаетъ вопросъ о нахожденіи r — радіуса кривизны. Внося (4) и (5) въ (1) находимъ кривизну.

$$\frac{1}{r} = \frac{q}{(1+p^2)^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Другой способъ рѣшенія этой задачи состоитъ въ слѣдующемъ: Кривая на длинѣ δs поворачивается на уголъ $\delta\theta$ и **кривизна** опредѣляется, какъ предѣльное значеніе отношенія

$$\frac{\delta\theta}{\delta s}, \text{ или } \frac{1}{r} = \frac{\delta\theta}{\delta s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Далѣе, $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} =$ положимъ p, такъ что $\theta = \operatorname{arctg} p$.

Отсюда

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{dp}{ds}.$$

Далѣе, $\dfrac{ds}{dx}=\sqrt{1+p^2}=\dfrac{ds}{dp}\cdot\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{ds}{dp}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Отсюда $$\frac{1}{r}=\frac{d\theta}{ds}\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(8).$$

Упражненіе 1. Уравненіе кривой есть
$$x^3-1500x^2+30000x-3000000y=0.$$

Показать, что знаменатель $\frac{1}{r}$ въ (8) въ предѣлахъ отъ $x=0$ до $x=100$ равенъ съ достаточной точностью 1. Найти кривизну въ точкѣ $x=0$.

2. Найти кривизну въ началѣ координатъ въ кривой $y=x^4-4x^3-18x^2$. Отвѣтъ: 36.

3. Показать, что радіусъ кривизны въ точкѣ $x=a$, $y=0$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ равенъ $\frac{b^2}{a}$.

4. Найти радіусъ кривизны въ параболѣ $y^2=4ax$, въ точкѣ $x=0$. Отвѣтъ: $r=2a$.

5. Найти радіусъ кривизны для $y=be^{ax}$.

Отвѣтъ: $q=a^2be^{ax}, p=abe^{ax}$, $r=\dfrac{(1+a^2b^2e^{2ax})^{3/2}}{a^2be^{ax}}$, такъ что въ точкѣ $x=0$, $r=\dfrac{(1+a^2b^2)^{3/2}}{a^2b}$.

6. Найти радіусъ кривизны для $y=a\sin bx$.

Отвѣтъ: $r=\dfrac{(1+a^2b^2\cos^2 bx)^{3/2}}{-ab^2\sin bx}$. Въ точкѣ $x=0$, $r=\infty$, т. е. кривизна 0; при $bx=\frac{\pi}{2}$, $r=\dfrac{1}{-ab^2}$.

7. Найти радіусъ кривизны цѣпной линіи
$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Отвѣтъ: $r=\dfrac{y^2}{c}$ Въ вершинѣ, при $x=0$, $y=c$, $r=c$.

8. Показать, что радіусъ кривизны кривой

$$y^2(x-4m)=mx(x-3m),$$

въ одной изъ точекъ, гдѣ $y=0$, равенъ $\frac{3m}{8}$, а въ другой равенъ $\frac{3m}{2}$.

9. Найти уравненіе круга кривизны кривой $y^4=4m^2x^2-x^4$ въ точкѣ $x=0$, $y=0$.

10. Радіусъ кривизны кривой $3a^2y=x^3$ равенъ $r=\frac{(a^4+x^4)^{3/2}}{2a^4x}$.

11. Показать, что въ эллипсѣ радіусъ кривизны равенъ $(a^2-e^2x^2)^{3/2}: ab$, гдѣ $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$, причемъ e есть эксцентриситетъ.

12. Найти радіусъ кривизны кривой $xy=a$.

Отвѣтъ: $(x^2+y^2)^{3/2}:2a$.

13. Найти радіусъ кривизны гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Отвѣтъ: $(e^2x^2-a^2)^{3/2}:ab$, гдѣ $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}$.

14. Въ цѣпной линіи радіусъ кривизны равенъ и противоположенъ длинѣ нормали.

15. Найти радіусъ кривой, уравненіе которой $y\frac{dx}{dy}=\sqrt{a^2-y^2}$.

224. Пусть $f(x,y,a)=0$. . . . . (1)
будетъ уравненіе семейства кривыхъ, причемъ a остается постоянной для каждой кривой, но является **перемѣннымъ параметромъ** для всего семейства, такъ какъ давая то или другое значеніе для a, можно получить различныя кривыя одного семейства.

$f(x,y,a+\delta a)=0$. . . . . (2)
есть ближайшій членъ семейства, если предположить, что

δa безконечно убываетъ. Далѣе, (2) можетъ быть написано въ видѣ (см. (1) п. 21)

$$f(x, y, a) + \delta a \cdot \frac{d}{da} f(x, y, a) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

и точка пересѣченія (2)† съ (1) можетъ быть получена совмѣстнымъ рѣшеніемъ относительно x и y этихъ уравненій. Иначе говоря, если мы исключимъ a изъ (1) при помощи уравненія

$$\frac{d}{da} f(x, y, a) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

то мы получимъ соотношеніе, которое должно быть справедливо для значеній x и y точекъ пересѣченія послѣдовательныхъ кривыхъ, получаемыхъ отъ непрерывнаго измѣненія величины a. Это уравненіе называется уравненіемъ **обертки** ряда кривыхъ (1) и легко доказать, что она имѣетъ общія точки съ каждой кривой изъ всего семейства кривыхъ.

Примѣръ. Принимая различныя значенія для a въ уравненіи

$$y = \frac{m}{a} + ax,$$

мы получаемъ семейство прямыхъ линій; найти уравненіе его обертки. Здѣсь $f(x, y, a) = 0$ представляется въ видѣ

$$y - \frac{m}{a} - ax = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)^*,$$

Дифференцируя относительно a, имѣемъ

$$+\frac{m}{a^2} - x = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)^*,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a^2}{m}, \text{ или } a^2 = \frac{m}{x}$$

Подставляя это выраженіе въ (1)*, имѣемъ

$$y - \sqrt{mx} - x\sqrt{\frac{m}{x}} = 0,$$

или $$y - 2\sqrt{mx} = 0, \text{ или } y^2 = 4mx,$$

— парабола.

Примѣръ. Положимъ, что въ упражненіи 3 п. 24 всѣ летательные снаряды выпускаются съ одной и той же скоростью V, но

подъ различными углами къ горизонту, тогда кривые пути, описываемые ими, образуютъ семейство кривыхъ

$$y = \frac{V \sin \alpha}{V \cdot \cos \alpha} x - {}^1/_2\, g \frac{x^2}{V^2 \cos^2 \alpha},$$

или

$$y - xa + mx^2 (a^2 + 1) = 0,$$

гдѣ a — перемѣнный параметръ поставленъ вмѣсто $\operatorname{tg}\alpha$, а

$$m = \frac{1}{2}\frac{g}{V^2}.$$

Дифференцируя относительно a, имѣемъ

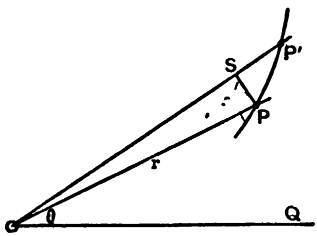
$- x + 2mx^2 a = 0$ или $a = + \frac{1}{2mx}$; слѣдовательно,

$y - \frac{1}{2m} + mx^2\left(\frac{1}{4m^2x^2} + 1\right) = 0$ — есть уравненіе обертывающей кривой, или

$$y = - mx^2 + \frac{1}{4m}.$$

Это — уравненіе параболы, вершина которой находится на разстояніи $\frac{1}{4m}$ или $\frac{V^2}{2g}$ надъ точкой выпуска снарядовъ.

225.† **Полярныя координаты**. Если, вмѣсто того, чтобы опредѣлять положеніе точки ея координатами x и y, мы опредѣлимъ его разстояніемъ OP, называемымъ r — радіусомъ векторомъ и угломъ QOP (черт. 101), называемымъ θ, такъ что, вмѣсто прежняго x, мы будемъ имѣть $r \cos \theta$ и вмѣсто y — $r \sin \theta$, то уравненія нѣкоторыхъ кривыхъ, напримѣръ спиралей, примутъ болѣе простой видъ. Если координаты P' суть $r + \delta r$ и $\theta + \delta\theta$, тогда въ предѣлѣ PSP' можно разсматривать, какъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ $PS = r.\delta\theta$, $SP' = \delta r$, PP' или $\delta s = \sqrt{r^2(\delta\theta)^2 + (\delta r)^2}$, такъ что



Черт. 101.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Далѣе, элементарная площадь POP' въ предѣлѣ равна, $^1/_2 r^2 . \delta\theta$, а площадь, заключенная между радіусомъ векторомъ съ угломъ θ_1 и радіусомъ съ угломъ θ_2, равна $^1/_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 . d\theta$, такимъ образомъ, если r можетъ быть выражено черезъ θ, то легко найти площадь сектора. Далѣе, уголъ φ между касательной въ точкѣ P и r очевидно такой, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{PS}{P'S}$ или $r \frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tg} \varphi$. Такой методъ изученія кривыхъ интересенъ для тѣхъ, кто занимается астрономіей.

Пусть $r = a^{b\theta}$ (равноугольная спираль).

$$\frac{dr}{d\theta} = ba^{b\theta} \log a, \text{ а потому } r \frac{d\theta}{dr}, \text{ или } r : \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{b \log a},$$

такъ что $\operatorname{tg} \varphi$ — постояненъ, т. е. кривая вездѣ составляетъ одинъ и тотъ же уголъ съ радіусомъ векторомъ.

Пусть $x = r \cos\theta$, такъ что x есть всегда проекція радіуса вектора на нѣкоторую линію, слѣдовательно, $x = a^{b\theta} \cos\theta$. Далѣе, вообразимъ, что радіусъ векторъ вращается съ равномѣрною угловой скоростью — q радіановъ въ секунду, начиная съ угла $\theta = 0$, когда $t = 0$, такъ что $\theta = -qt$, а потому $x = a^{-bqt} \cos qt$.

Итакъ мы видимъ, что простое гармоническое движеніе есть проекція равномѣрнаго угловаго движенія въ кругѣ, а **ослабленное простое гармоническое движеніе** есть проекція равномѣрнаго угловаго движенія по равноугольной спирали (см. примѣчаніе къ п. 112).

Упраж. 1. Найти **площадь** кривой $r = a\,(1 + \cos\theta)$. Начертимъ кривую и замѣтимъ, что полная площадь равна $\int_0^\pi r^2 . d\theta$, или $^3/_2 a\pi^2$.

Упраж. 2. Найти плошадь $r = a\,(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$. Отвѣтъ: πa^2.

Упраж. 3. Найти площадь, заключенную между конхоидой и двумя радіусами векторами. Отвѣтъ:

$$b^2 (\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1) + 2ab \log \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - {}^1/_2 \theta_2\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - {}^1/_2 \theta_1\right) \right\}.$$

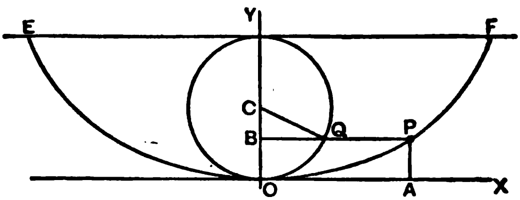
226. Упражненія. 1. Найти площадь поверхности вращенія цѣпной линіи вокругъ оси y'овъ (п. 38).

2. Доказать, что уравненіе циклоиды, съ вершиною въ началѣ координатъ, имѣетъ видъ

$$x = a\,(\theta + \sin\theta),\quad y = a\,(1 - \cos\theta),$$

если (черт. 102) $PB = x$, $PA = y$, $OCQ = \theta$.

Показать, что, когда циклоида вращается около оси y'овъ, она образуетъ объемъ $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right)$, а когда она вращается около оси x'овъ, то образуетъ объемъ $\pi^2 a^3$. Если она вращается около EF, то образуетъ объемъ $5\pi^2 a^3$.



Черт. 102.

3. **Найти длину кривой** $9ay^2 = 4x^3$.

Отвѣтъ: $s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x}{a}}\,.\,dx = {}^2/_3 a\left\{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{3/2} - 1\right\}$.

4. Найти длину кривой $y^2 = 2ax - x^2$.

Отвѣтъ; $s = a \operatorname{arcvers} \sin \frac{x}{a}$.

5. Найти длину циклоиды (см. п. 47)

Отвѣтъ: $s = 8a\,(1 - \cos {}^1/_2\,\varphi) = 8a - 4\sqrt{4a^2 - 2ay}$.

6. Найти длину параболы $y = \sqrt{4ax}$ считая отъ вершины.

Отвѣтъ: $s = \sqrt{ax + x^2} + a \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a + x}}{\sqrt{a}}$

7. Показать, что полная площадь спутника циклоиды есть дважды взятая площадь образующаго круга.

8. Найти площадь кривой $r = be^{\frac{\theta}{c}}$ между радіусами r_1 и r_2, пользуясь формулой $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} {}^1/_2\, r^2 . d\theta$.

Отвѣтъ: $\frac{c}{4}(r_2^2 - r_1^2)$.

9. Показать, что въ логариѳмической кривой $x = ae^{\frac{y}{c}}$

$$s = c \log \frac{x}{c + \sqrt{c^2 + x^2}} + \sqrt{c^2 + x^2} + C.$$

10. Показать, что въ кривой $r = a(1 + \cos\theta)$, пользуясь уравненіемъ

$$s = \int d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

получимъ $$s = 4a \sin\frac{\theta}{2}.$$

11. Показать что въ кривой $r = be^{\frac{\theta}{c}}$,

$$s = r\sqrt{1 + c^2} + C.$$

12. Показать, что въ циклоидѣ

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{1 - \frac{y}{2a}};$$

и, слѣдовательно, $$s = 4\sqrt{a^2 - {}^1/_2 ay} - 2a.$$

13. Показать, что въ кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$,

$$s = {}^3/_2\, a^{1/3} x^{2/3}.$$

14. Эллипсъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается около оси x. Доказать, что плащадь образовавшейся поверхности равна

$$2\pi ab\left\{\sqrt{1 - e^2} + \frac{\arcsin e}{e}\right\},$$

гдѣ $$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

15. Показать, что полная площадь кривой $\frac{x^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{b^{2/3}} = 1$ равна $^3/_8\,\pi ab$.

16. Найти площадь петли кривой $y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

Отвѣтъ: $2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

17. Найти полную площадь кривой $y = x + \sqrt{a^2 - x^2}$.

Отвѣтъ: πa^2.

18. Найти площадь петли кривой $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Отвѣтъ: $^1/_2 a^2$.

19. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Т. е. найти четыре раза взятую величину интеграла

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx.$$

20. Найти площадь циклоиды въ функціи отъ угла φ (п. 11).

$$\int y\,.\,dx = \int y\,.\,\frac{dx}{d\varphi}\,.\,d\varphi.$$

Отвѣтъ: $a^2\,(^3/_2\,\varphi - 2\sin\varphi + {}^1/_4 \sin 2\varphi)$; и если предѣлы φ суть 0 и 2π, то мы получимъ полную площадь равной 3 раза взятой площади катящагося круга.

227. Тѣло вѣса W подъ вліяніемъ силы тяжести **движется въ средѣ,** въ которой сопротивленіе равно $= av^n$, гдѣ v скорость, а a и n—постоянныя.

Тогда $\frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = W - av^n$.

Какова будетъ скорость, когда ускореніе становится равнымъ нулю? Пусть v_1 есть эта **предѣльная скорость.** $av_1{}^n = W$, или $a = Wv_1{}^{-n}$.

$$g\frac{dt}{dv} = \frac{1}{1 - \frac{av^n}{W}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^n};$$

такъ что $$t=\frac{1}{g}\int\frac{dv}{1-\left(\frac{v}{v_1}\right)^n}.$$

Далѣе, пусть $n=2$, $t=\frac{v_1}{2g}\log\frac{v_1+v}{v_1-v}$,

отсюда $$v=v_1\ \mathrm{tghyp}\frac{gt}{v_1}=\frac{dx}{dt}.$$

Если черезъ x обозначимъ высоту паденія, то

$$x=\frac{v_1^2}{g}\log.\ \mathrm{coshyp}\frac{gt}{v_1}.$$

228. Нашъ старый примѣръ п. 24.

Точка движется такъ, что не имѣетъ горизонтальнаго ускоренія, а ея ускореніе g сверху внизъ постоянно. Пусть y будетъ измѣняться снизу вверхъ, а x по горизонтальному направленію, тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-g,$$

$$\frac{dx}{dt}=c,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=c\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=c\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}=c^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Отсюда $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-g}{c^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-g}{c^2}x+a,$$

$$y=-\frac{1}{2}\frac{g}{c^2}x^2+ax+b\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

уравненіе параболы. Сравнить съ п. 24.

Если мы примемъ $y=0$, то и $b=0$. Далѣе, мы видимъ, что a есть тангенсъ угла, который траекторія составляетъ съ горизонталью при $x=0$ а c есть постоянная горизонтальная скорость. Если метательный снарядъ имѣетъ на-

чальную скорость V подъ угломъ къ горизонту α, тогда $c = V\cos\alpha$, и $\operatorname{tg}\alpha = a$, такъ что (1) принимаетъ видъ

$$y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{V^2\cos^2\alpha} + x\operatorname{tg}\alpha.$$

229. Упражненія, касающіяся ряда Фурье.

1. Періодическая функція x имѣетъ значеніе $f(x) = mx$, между предѣлами $x = 0$ и $x = c$, гдѣ c означаетъ періодъ; затѣмъ сразу обращается въ 0 и далѣе, въ теченіи слѣдующаго періода, такимъ же образомъ возрастаетъ до величины mc.

Отсюда (см. п. 133), $q = \frac{2\pi}{c}$.

$$mx = a_0 + a_1\sin qx + b_1\cos qx + \text{и т. д.}$$
$$+ a_s\sin sqx + b_s\cos sqx + \text{и т. д.}$$

$a_0 = {}^1/_2\, mc,$

$$a_s = \frac{2}{c}\int_0^c mx . \sin sqx . dx,\quad b_s = \frac{2}{c}\int_0^c mx . \cos . sqx . dx.$$

Отвѣтъ:

$$mx = {}^1/_2 mc - \frac{mc}{\pi}(\sin qx + {}^1/_2\sin 2qx + {}^1/_3\sin 3qx +$$
$$+ {}^1/_4\sin 4qx + \text{и т. д.}$$

2. Разложить x въ рядъ синусовъ и въ рядъ косинусовъ.

Отвѣтъ: $x = 2\ (\sin x - {}^1/_2\sin 2x + {}^1/_3\sin 3x - \text{и т. д.})$ въ предѣлахъ между $-\pi$ и $+\pi$;

такимъ же образомъ $x = \frac{4}{\pi}(\sin x - {}^1/_9\sin 3x + {}^1/_{25}\sin 5x$ и т. д.) въ предѣлахъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$; далѣе

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + {}^1/_9\cos 3x + {}^1/_{25}\cos 5x + \text{и т. д.}).$$

3. Доказать, что $\frac{\pi}{4} = \sin x + {}^1/_3\sin 3x + {}^1/_5\sin 5x + \text{и т. д.}$

4. Показать, что

$$e^{ax} - e^{-ax} = \frac{2}{\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\left\{\frac{\sin x}{1 + a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 + a^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\sin 3x}{3^2 + a^2} - \text{и т. д.}\right\}.$$

5. Проинтегрировать каждое изъ вышеприведенныхъ выраженій.

230. Положимъ, что радіусъ инерціи шара относительно діаметра будетъ k, а радіусъ $= a$; доказать, что

$$k^2 = {}^2/_5\, a^2.$$

Такъ какъ здѣсь $x^2 + y^2 = a^2$, то моментъ инерціи шарового слоя радіуса y и толщины δx относительно центра равенъ

$$\frac{\pi}{2} y^4 . \delta x.$$

Моментъ инерціи шара равенъ

$$\int_0^a \pi m y^2 . dx \times y^2 = \int_0^a \pi m y^4 . dx = m\ {}^8/_{15}\ \pi a^5,$$

а масса его равна $m\,{}^4/_3\ \pi a^3$.

2. Въ параболоидѣ, имѣющемъ высоту h и радіусъ основанія a, относительно оси $k^2 = {}^1/_3\, a^2$.

Относительно діаметра основанія $k^2 = {}^1/_6 (a^2 + h^2)$.

3. Въ треугольникѣ высоты h относительно линіи, проходящей черезъ вершину и параллельной основанію, $k^2 = {}^1/_2\, h^2$.

Относительно линіи, проходящей черезъ центръ треугольника и параллельной основанію, $k^2 = {}^1/_{18}\, h^2$.

231. Теорема Тейлора. Если функціи отъ $x + h$ дифференцировать относительно x, предполагая h постояннымъ, то мы получимъ тотъ же отвѣтъ, какъ и въ томъ случаѣ, если будемъ дифференцировать относительно h, предполагая x постояннымъ.

Это очевидно. Назовемъ ее функціей $f(u)$, гдѣ $u = x + h$. Тогда $\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{du} f(u) \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} f(u)$, такъ какъ $\frac{du}{dx} = 1$.

Тотъ же отвѣтъ получимъ, взявъ $\frac{d}{dh} f(u)$, такъ какъ

$$\frac{d}{dh} f(u) = \frac{d}{du} f(u) \times \frac{du}{dh} = \frac{d}{du} f(u), \text{ такъ какъ } \frac{du}{dh} = 1.$$

Положимъ, что $f(x + h)$ можетъ быть представлена въ видѣ ряда восходящихъ степеней h.

$$f(x + h) = X_0 + X_1 h + X_2 h^2 + X_3 h^3 + \text{и т. д.} \quad (1),$$

гдѣ X_0, X_1, X_2 и т. д. не содержатъ h.

$$\frac{df(x+h)}{dh}=0+X_1+2X_2h+3X_3h^2+\text{и т. д.} \ (2),$$

$$\frac{df(x+h)}{dx}=\frac{dX_0}{dx}+\frac{dX_1}{dx}.h+\frac{dX_2}{dx}.h^2+\text{и т. д.} \ (3).$$

Такъ какъ (2) и (3) тождественно равны, то

$$X_1=\frac{dX_0}{dx},\ X_2=\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx}=\frac{1}{1.2}\frac{d^2X_0}{dx^2};$$

$$X_3=\frac{1}{3}\frac{dX_2}{dx}=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3X_0}{dx^3}.$$

Далѣе, если $h=0$ въ (1), мы находимъ, что $X_0=f(x)$. Если мы обозначимъ $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ посредствомъ $f''(x)$, тогда теорема Тейлора представляется въ видѣ

$$\mathbf{f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+}$$
$$\mathbf{+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\text{и т. д.} \ \ldots (4).}$$

Если мы дважды продифференцируемъ $f(x)$ и въ результатъ вставимъ вмѣсто x значеніе 0, то полученную производную мы можемъ обозначить $f''(0)$. Если мы подставимъ вмѣсто x значеніе 0 въ выраженіи (4), то получимъ

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{1.2}f''(0)$$
$$+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(0)+\text{и т. д.} \ \ldots (5).$$

Замѣтимъ, что намъ дальше не приходится имѣть дѣло съ величиной, которую мы называемъ x. Мы можемъ, если пожелаемъ, взять вмѣсто h какую нибудь другую букву, напр. x и тогда (5) приметъ видъ

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\text{и т. д.} \ \ldots (6);$$

этимъ и выражается **теорема Маклорена**.

Данное здѣсь доказательство теоремы Тейлора неполное, такъ какъ мы пользовались безконечными рядами, не

доказывая ихъ сходимости. Болѣе точныя доказательства можно найти въ систематическихъ сочиненіяхъ.

Замѣтимъ, что, если x есть время и $s = f(t)$ обозначаетъ разстояніе тѣла отъ нѣкоторой неподвижной плоскости въ пространствѣ, тогда, если въ настоящій моментъ, который мы назовемъ t_0, мы знаемъ s, скорость, ускореніе, $\frac{d^3s}{dt^3}$ и т. д., т. е., если мы обсолютно точно знаемъ всѣ обстоятельства движенія въ настоящій моментъ, то мы можемъ предсказать, гдѣ тѣло будетъ въ нѣкоторый будущій моментъ, а также можемъ сказать, гдѣ оно было въ нѣкоторый уже прошедшій моментъ. Это—очень распростаненная теорема и ею можно пользоваться въ очень многихъ случаяхъ.

232. Упражненія на теорему Тейлора. 1. Представить $(x+h)^n$ въ видѣ ряда со степенями h.

Здѣсь $f(x) = x^n$; $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, и т. д., а потому

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} h^2 x^{n-2} + \text{ и т. д.}$$

Это есть теорема бинома, являющаяся частнымъ случаемъ теоремы Тейлора.

2. Представить $\log(x+h)$ въ видѣ ряда степеней h.

Здѣсь $$f(x) = \log(x); \; f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$f''(x) = -x^{-2}; \; f'''(x) = +2x^{-3},$$

и потому $$\log\;(x+h) = \log x + h\frac{1}{x} - \frac{h^2}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{h^3}{3}\frac{1}{x^3} \text{ и т. д.}$$

Если мы положимъ $x = 1$, то мы получимъ полезную формулу

$$\log(1+h) = 0 + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \text{ и т. д.}$$

3. Показать, что

$$\sin\;(x+h) = \sin x + h\,\cos x - \frac{h^2}{1 \,.\, 2}\sin x - \frac{h^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\cos x +$$

и т. д.

4. Показать, что

$$\cos (x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{1.2} \cos x + \frac{h^3}{1.2.3} \sin x +$$

и т. д.

5. Какой видъ примутъ выраженія въ 3 и 4 примѣрахъ, если $x = 0$?

233. Упражненія на теорему Маклорена. 1. Представить $\sin x$ въ видѣ ряда степеней x.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x, & f(0) = 0, \\ f'(x) = \cos x, & f'(0) = 1. \\ f''(x) = -\sin x, & f''(0) = 0, \\ f'''(x) = -\cos x, & f'''(0) = -1, \\ f^{\text{iv}}(x) = \sin x, & f^{\text{iv}}(0) = 0, \\ \text{и т. д.} & f^{\text{v}}(0) = 1. \end{array}$$

Отсюда $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +$ и т. д.

2. Подобнымъ же образомъ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \text{ и т. д.}$$

Вычислить изъ вышеприведенныхъ рядовъ значенія синуса и косинуса угла, положимъ, 0.2 радіановъ и сравнить съ тѣми величинами, которыя даны въ таблицахъ.

3. Разложить въ рядъ argtgx. Здѣсь можно примѣнить другой способъ.

Производная arctgx равна $\frac{1}{1+x^2}$, а эта величина, по выполненіи дѣленія, равна $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$ и т. д.

Интегрируя это выраженіе почленно, мы находимъ
$\text{arctg}x = x - {}^1/_3 x^3 + {}^1/_5 x^5 - {}^1/_7 x^7 + {}^1/_9 x^9 -$ и т. д.

Мы не прибавляемъ постояннаго, такъ какъ, когда $x = 0$, $\text{arctg}x = 0$.

4. Разложить въ рядъ $\text{tg}\,(1 - x)$ непосредственно на основаніи теоремы Маклорена.

5. Показать, что

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} (\log a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log a)^3 + \text{и т. д.}$$

6. Показать, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} +$ и т. д.

234. Разложить въ рядъ $e^{i\theta}$, сравнить съ разложеніями $\sin\theta$ и $\cos\theta$ и показать, что

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,$$
$$\cos\theta = {}^1/_2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Очевидно, что $(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$, — это выражаетъ **теорему Демоавра**.

При рѣшеніи кубическихъ уравненій, когда имѣются 3 дѣйствительныхъ корня, приходится пользоваться теоремой Демоавра для извлеченія корней изъ мнимыхъ количествъ. Извлечемъ корень q'той степени изъ $a + bi$, гдѣ a и b суть численныя величины. Сначала пишемъ

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Тогда $r\cos\theta = a$, $r\sin\theta = b$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}$.

Такимъ образомъ получимъ значеніе r и θ.

Далѣе, корни q'той степени будутъ

$$r^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{1}{q}\theta + i\sin\frac{1}{q}\theta\right),$$
$$r^{\frac{1}{q}}\left\{\cos\frac{1}{q}(2\pi + \theta) + i\sin\frac{1}{q}(2\pi + \theta)\right\},$$
$$r^{\frac{1}{q}}\left\{\cos\frac{1}{q}(4\pi + \theta) + i\sin\frac{1}{q}(4\pi + \theta)\right\}.$$

Легко видѣть, что здѣсь будетъ только q корней q'ой степени.

Упражненіе. Найти три кубическихъ корня изъ 8.

Вмѣсто 8 напишемъ: $8(\cos 0 + i\sin 0)$, $8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$, $8(\cos 4\pi + i\sin 4\pi)$ и далѣе поступимъ, какъ сказано выше.

235. $e^{h\theta}$ разлагается въ слѣдующій рядъ

$$e^{h\theta} = 1 + h\theta + \frac{1}{1.2} h^2\theta^2 + \frac{1}{1.2.3} h^2\theta^3 + \text{и т. д.}$$

Далѣе, положимъ, что θ означаетъ дѣйствіе $\frac{d}{dx}$, тогда легко видѣть, что $f(x+h) = e^{h\theta} f(x)$; иначе говоря, $e^{h\frac{d}{dx}} f(x)$ символически изображаетъ теорему Тейлора.

236. Уравненіе, которое связываетъ x, y и производныя называется **дифференціальнымъ уравненіемъ**. Мы уже рѣшали нѣкоторыя изъ этихъ уравненій. Порядокъ уравненія опредѣляется знакомъ наибольшей степени производной. Дифференціальное уравненіе называется **линейнымъ**, когда оно первой степени относительно y (зависимой перемѣнной) и всѣхъ производныхъ, разсматриваемыхъ, какъ неизвѣстныя количества. Легко убѣдиться, что если получены нѣкоторыя частныя рѣшенія линейнаго уравненія, то ихъ сумма будетъ также удовлетворять уравненію.

Положимъ, что дано уравненіе, связывающее x и y, содержащее постоянныя. Дифференцируя его одинъ разъ или болѣе, мы можемъ получить достаточное количество уравненій, чтобы можно было изъ нихъ исключить постоянныя. Такимъ путемъ мы получаемъ дифференціальное уравненіе. Первоначальное уравненіе, отъ котораго оно произошло, содержитъ n произвольныхъ постоянныхъ, если уравненіе это n-го порядка.

Упражненіе. Исключить a и b изъ

$$y = ax^2 + bx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1),$$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b;\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2a;\ b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Отсюда (1) принимаетъ видъ

$$y = \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

или

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2).$$

Если мы рѣшимъ (2), мы найдемъ, что $y = Ax^2 + Bx$, гдѣ A и B суть произвольныя постоянныя.

237. Рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій мы начнемъ съ уравненій перваго порядка и первой степени.

Къ этой категоріи относятся всѣ уравненія типа $M + N\frac{dy}{dx} = 0$, гдѣ M и N суть функціи x и y. Мы обыкновенно пишемъ это уравненіе въ видѣ

$$M.dx + N.dy = 0.$$

Примѣры.

1. $(x + a)(b + y)\,dx + dy = 0$ или $(a + x)\,dx + \frac{1}{b+y}dy = 0.$

Интегрируя, мы получаемъ въ общемъ видѣ рѣшеніе

$$ax + {}^1/_2 x^2 + \log(b + y) = C,$$

гдѣ C произвольное постоянное.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ подобныхъ этому случаяхъ, когда мы можемъ отдѣлять перемѣнныя, задача рѣшается легко.

Такъ, если $f(x)F(y).dx + \varphi(x).\psi(y).dy = 0$, то имѣемъ

$$\frac{f(x).dx}{\varphi(x)} + \frac{\psi(y).dy}{F(y)} = 0,$$

и это уравненіе можетъ быть интегрировано сразу.

2. $(1 + x)y.dx + (1 - y)x.dy = 0,$

или $$\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0.$$

Отсюда $$\log x + x + \log y - y = C,$$

или $$\log xy = C + y - x.$$

3. $$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0.$$

Интегрируя, имѣемъ $\arcsin x + \arcsin y = c$.

Это можетъ быть представлено въ другомъ видѣ. Беря синусы обѣихъ частей уравненія, имѣемъ

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = C.$$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1+x}{1+y}$ принимаетъ видъ $(y+y^2)\,dy=(x+x^2)\,dx$.

Отвѣтъ: $^1/_2 y^2+{}^1/_3 y^3={}^1/_2 x^2+{}^1/_3 x^3+$ постоянное.

5. $\dfrac{xy(1+x^2)}{1+y^2}=\dfrac{dx}{dy}$. Отвѣтъ: $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$.

6. $\sin x\,.\cos y\,.dx-\cos x\,.\sin y\,.dy=0$.

Отвѣтъ: $\cos y=c\cos x$.

7. $(y^2+xy^2)\,dx+(x^2-yx^2)\,dy=0$.

Отвѣтъ: $\log\dfrac{x}{y}=c+\dfrac{y+x}{xy}$.

8. $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}}=0$. Отвѣтъ. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$.

238. Иногда помощью пробъ мы находимъ подходящую **подстановку**. Такъ, рѣшимъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x}{2xy},$$

мы пробуемъ $y=\sqrt{xv}$, тогда находимъ $\dfrac{dx}{x}+dv=0$,

которое приводится къ

$$\lg x+\frac{y^2}{x}=c.$$

Рѣшить $\quad (y-x)\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx}=n\,(1+y^2)^{3/2}$.

239. Если M и N суть **однородныя** функціи x и y одинаковой степени, то принимаемъ $y=vx$ и уравненіе приведется къ формѣ п. 237.

Примѣръ 1. $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$. Приремъ $y=vx$,

$$dy=v\,.\,dx+x\,.\,dv,$$

$$vx\,.\,dx+(2x\sqrt{v}-x)(v\,.\,dx+x\,.\,dv)=0,$$

$$(2xv^{3/2})\,dx+(2x^2\sqrt{v}-x^2)\,dv=0,$$

$$\frac{2dx}{x}+\frac{2\sqrt{v}-1}{v^{3/2}}dv=0,$$

$$2\frac{dx}{x}+\left(\frac{2}{v}-\frac{1}{v^{3/2}}\right)dv=0,$$

$$2\lg x+2\lg v+2v^{-1/2}=C,$$

$$\lg xv+v^{-1/2}=C,$$

$$\lg y+\sqrt{\frac{x}{y}}=C.$$

Отвѣтъ: $y=ce^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}$,

гдѣ c — произвольное постоянное.

Примѣръ 2. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{y}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}.$

Пусть $y=vx$, и мы получимъ отвѣтъ

$$\frac{x^{1/2}}{x^{1/2}-y^{1/2}}+\lg\left[(x^{1/2}-y^{1/2})(x-y)^{1/2}\right]=C.$$

Примѣръ 3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$

Отвѣтъ: $x^2=2Ay+A^2$.

Надо помнить, что иногда два отвѣта въ дѣйствительности тожественные, на видъ кажутся различными.

4. Рѣшить уравненіе $(x^3+3xy^2)\,dx+(y^3+3x^2y)\,dy=0$.

Отвѣтъ: $x^4+6x^2y^2+y^4=C$.

5. Рѣшить $y^2+(xy+x^2)\dfrac{dy}{dx}=0$.

Отвѣтъ: $3xy+x+2y^2=Cx^{1/2}\,(2y+x)^{3/2}$.

6. Рѣшить $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}\,.\,dy=0$.

Отвѣтъ: $x=ce^{-\sin\frac{y}{x}}$.

7. $(y-x)\,dy-y\,.\,dx=0$. Отвѣтъ: $2y=ce^{-\frac{x}{y}}$.

8. $xdy-y\,.\,dx-\sqrt{x^2+y^2}\,.\,dx=0$. Отвѣтъ: $x^2=c^2+2cy$.

9. $x + y\dfrac{dy}{dx} = 2y$. Отвѣтъ: $(x-y)e^{\frac{x}{x-y}} = C$.

240. Видъ уравненія такой: $(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$.

Примемъ $x = w + \alpha$, $y = v + \beta$, и выберемъ α и β такими, чтобы исчезли постоянные члены.

Такъ, если $(3x - 2y + 4)\,dx + (2x - y + 1)\,dy = 0$; то, такъ какъ $dx = dw$ и $dy = dv$, то мы получимъ
$(3w + 3\alpha - 2v - 2\beta + 4)\,dw + (2w + 2\alpha - v - \beta + 1)\,dv = 0$.

Теперь выберемъ α и β такими, чтобы

$$3\alpha - 2\beta + 4 = 0 \text{ и } 2\alpha - \beta + 1 = 0,$$

или $$-\alpha + 2 = 0, \text{ отсюда } \alpha = 2, \beta = 5.$$

Такимъ образомъ нужно сдѣлать подстановку $x = w + 2$, $y = v + 5$, и уравненіе обратится въ однородное.

Упражненіе. $(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$.

Отвѣтъ: $(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = c$.

Упражненіе. $$\frac{dy}{dx} + \frac{2x - y + 1}{2y - x - 1} = 0.$$

Отвѣтъ: $x^2 - xy = y^2 + x - y = c$.

241. Точными дифференціальными уравненіями называются такія, которыя получаются черезъ дифференцированіе функцій x и y, причемъ послѣ этого онѣ не были ни умножены, ни раздѣлены на какую либо функцію x и y. См. п. 83.

$Mdx + Ndy = 0$ есть точное дифференціальное уравненіе, если $\left(\dfrac{dM}{dy}\right) = \left(\dfrac{dN}{dx}\right)$, потому что $M = \dfrac{df(x, y)}{dx}$.
$N = \dfrac{d}{dy} f(x, y)$, при чемъ первоначальная $f(x, y) = c$. Легко убѣдиться, что

$$(x^3 - 3x^2y)\,dx + (y^3 - x^3)\,dy = 0,$$

есть точное дифференціальное уравненіе.

Въ этомъ случаѣ $x^3 - 3x^2y = \dfrac{df(x, y)}{dx}$.

Интегрируемъ, принимая y за постоянное, и прибавляя Y, неизвѣстную функцію y, вмѣсто постоянной.

$$f(x, y) = {}^1/_4x^4 - x^3y + Y.$$

Дифференцируя при x постоянномъ и приравнивая N, получимъ

$$-x^3 + \frac{dY}{dy} = y^3 - x^3,$$

$$\frac{dY}{dy} = y^3, \text{ а отсюда } Y = {}^1/_4y^4 + c.$$

Отсюда $\quad {}^1/_4x^4 - x^3y + {}^1/_4y^4 + c = 0,$
гдѣ c произвольная постоянная.

242. Любое уравненіе вида $M.dx + N.dy = 0$ можетъ быть обращено въ точное умноженіемъ на нѣкоторую функцію x, называемую **интегрирующимъ множителемъ**. См. п. 83. Относительно нахожденія такихъ множителей студенты могутъ обратиться къ классическимъ сочиненіямъ, трактующимъ дифференціальныя уравненія.

243. Линейныя уравненія перваго порядка.

Они имѣютъ такой видъ

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

гдѣ P и Q суть функціи отъ x.

Общее рѣшеніе ихъ такое. Назовемъ $\int P.dx$ черезъ X, тогда

$$y = e^{-X}\left\{\int e^X.Q.dx + C\right\} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

гдѣ C произвольная постоянная.

Не зачѣмъ давать здѣсь другого доказательства, какъ то, что если мы возьмемъ это y, то оно удовлетворитъ нашему уравненію. Вотъ это доказательство

$$(2) \text{ есть то же, что } ye^X = \int e^X Qdx + C \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Дифференцируя и помня, что $\frac{dX}{dx} = P$, мы дадимъ (3)

$$\text{такой видъ: } \frac{dy}{dx}e^X + ye^XP = e^X Q \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

или $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ — данное уравненіе.

Чтобы получить (2) изъ (1), умножаемъ (1) на ε^X и получимъ (4); интегрируемъ (4) и получимъ (3); раздѣлимъ его на e^X и получимъ (2).

Мы уже раньше писали (1) въ видѣ

$$(\theta+P)\,y=Q \text{ или } y=(\theta+P)^{-1}\,Q,$$

и теперь мы можемъ понять значеніе обратной операціи $(\theta+P)^{-1}$. Дѣйствительно, если $\int P\,.\,dx$ назовемъ X, то

$$(\theta+\mathrm{P})^{-1}\,\mathrm{Q} \text{ означаетъ } e^{-\mathrm{X}}\left\{\int e^{\mathrm{X}}\,.\,\mathrm{Q}\,.\,\mathrm{dx}+\mathrm{C}\right\}\ \dots\ (5).$$

Такъ, если $Q=0, (\theta+P)^{-1}\,0=Ce^{-X}$. Если P равно постоянному a, и $Q=0$, тогда $(\theta+a)^{-1}\,0=Ce^{-ax}$, гдѣ C есть произвольная постоянная. Мы уже имѣли это въ п. 168.

Если Q также постоянное, положимъ n, то

$$(\theta+a)^{-1}\,n=e^{-ax}\left\{\int ne^{ax}.\,dx+C\right\}$$

$$=Ce^{-ax}+\frac{n}{a}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6),$$

гдѣ C произвольная постоянная. См. п. 169.

Если $Q=e^{bx}$, то

$$(\theta+a)^{-1}e^{bx}=e^{-ax}\left\{\int \varepsilon^{(a+b)x}.\,dx+C\right\}$$

$$=Ce^{-ax}+\frac{1}{a+b}\,e^{bx}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7),$$

Легко показать, что, если $a=-b$. $y=(C+x)e^{-ax}$.

Если $Q=b\sin(cx+e)$, то

$$(\theta+a)^{-1}\,b\sin\,(cx+e)=e^{-ax}\left\{b\int e^{ax}\sin(cx+e).\,dx+C\right\}$$

$$=Ce^{-ax}+\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\left(cx+e-\mathrm{arctg}\,\frac{c}{a}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ (8).$$

244. *Примѣръ*. Положимъ, въ электрической цѣпи въ нѣкоторый моментъ t электродвижущая сила V, сила тока

24*

C, сопротивленіе R и самоиндукція L. Мы имѣемъ извѣстное уравненіе

$$V = RC + L\frac{dC}{dt},$$

или
$$\frac{dC}{dt} + \frac{R}{L}C = \frac{1}{L}V.$$

Но
$$\int \frac{R}{L}dt. = \frac{R}{L}t,$$

отсюда $C = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{1}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}V.dt + \text{постоянная } A\right\}$ . . . (1)

Здѣсь можетъ быть нѣсколько случаевъ.

1) Положимъ, что въ моментъ $t = 0$, V внезапно мѣняется, переходя отъ постояннаго значенія V_1 къ постоянному V_2. Такимъ образомъ въ предыдущемъ отвѣтѣ подставимъ, $V = V_2$ тогда получимъ

$$C = \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{1}{R}V_2 e^{\frac{R}{L}t} + A\right\}$$

$$= \frac{V_2}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Чтобы опредѣлить A, мы вспомнимъ, что при $t = 0$, $C = \frac{V_1}{R}$, такимъ образомъ $\frac{V_1}{R} = \frac{V_2}{R} + A$, такъ что $A = \frac{V_1 - V_2}{R}$ и отсюда

$$C = \frac{V_2}{R} - \frac{V_2 - V_1}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Такъ, если $V_1 = 0$, то $C = \frac{V_2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ . . . . (3),

уравненіе, показывающее, какъ возрастаетъ сила тока, когда цѣпь *замкнута*.

Если $V_2 = 0$, то $C = \frac{V_1}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ . . . . (4),

уравненіе, показывающее, какъ падаетъ сила тока, когда исчезла электродвижущая сила.

Студенты должны вычертить эти значенія C въ зависимости отъ времени.

Можно взять для примѣра въ (3) $V_2 = 100$ вольтъ, $R = 1$ ому, $L = 0{,}01$ генри.

Въ (4) возмите $V_1 = 100$ вольтъ. Сравн. п. 169.

2). Положимъ въ моментъ 0, V внезапно становится равной $V_0 \sin qt$,

$$C = e^{-\frac{R}{L}t} \left\{ \frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} . \sin qt . dt + A \right\},$$

$$C = e^{-\frac{R}{L}t} \left\{ \frac{V_0}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{R}{L} \sin qt - q \cos qt \right)}{\frac{R^2}{L^2} + q^2} + A \right\}.$$

Это принимаетъ видъ $C = Ae^{-\frac{R}{L}t} +$

$$+ \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}} \sin (qt - e) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

гдѣ $$\operatorname{tg} e = \frac{Lq}{R}.$$

Постоянная A въ исчезающемъ членѣ $Ae^{-\frac{R}{L}t}$ зависитъ отъ начальныхъ обстоятельствъ; такъ, если $C = 0$ при $t = 0$, то

$$0 = A - \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}} \sin e,$$

$$0 = A - \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}} \cdot \frac{Lq}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}},$$

или $$A = V_0 Lq : (R^2 + L^2 q^2).$$

Студенты должны вычертить кривыя для нѣсколькихъ примѣровъ, принимая различныя начальныя обстоятельства.

245. *Примѣръ*. На тѣло массы M, движущееся со скоростью v въ жидкости, оказывающей сопротивленіе его движенію fv, дѣйствуетъ сила F въ моментъ t. Уравненіе будетъ

$$M\frac{dv}{dt}+fv=F.$$

Замѣтимъ, что это въ точности соотвѣтствуетъ случаю въ электричествѣ, если M замѣнить черезъ L, f черезъ R, F черезъ V и v черезъ C; и потому мы получимъ аналогичныя рѣшенія, въ зависимости отъ того, будетъ ли F постоянно, или оно измѣняется отъ нѣкоторой постоянной величины F_1 до другой F_2, или слѣдуетъ закону $F_0 \sin qt$.

Эта аналогія можетъ быть очень полезна для изучающихъ электричество. Легко устроить механическую модель, иллюстрирующую возрастаніе или паденіе силы тока.

Рѣшенія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами имѣютъ столь обширное примѣненіе въ инженерныхъ разсчетахъ, что мы уже раньше обратили вниманіе на этотъ предметъ и дали нѣсколько примѣровъ въ главѣ II. Полезно было бы студенту вновь вернуться къ п. 151 и прочесть его еще разъ теперь.

246. *Примѣръ*. $x\frac{dy}{dx}=ay+x+1,$

или
$$\frac{dy}{dx}-\frac{a}{x}y=1+\frac{1}{x}.$$

$$\int\frac{-a}{x}.dx=X=-a\log x.$$

Замѣтимъ, что $e^{-a\log x}=x^{-a}$, $e^{a\log x}=x^{a}$.

Отсюда
$$y=x^a\left\{\int x^{-a}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+C\right\},$$

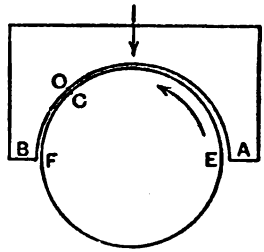
$$y=x^a\left\{\int(x^{-a}+x^{-a-1})\,dx+C\right\},$$

$$y=x^a\left\{\frac{x^{1-a}}{1-a}+\frac{x^{-a}}{-a}+C\right\},$$

$$y=\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}+Cx^a,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

247. Положимъ, что между поверхностями AB и EF находится постоянно смазывающая жидкость, какъ, напримѣръ, между шейкой вала и подшипникомъ. $OC = h_0$ самое близкое разстояніе между ними. На разстояніи x, измѣряемомъ по дугѣ OA, положимъ, толщина равна h. Положимъ, что гдѣ нибудь на нормали, представляющей толщину слоя, находится нѣкоторая точка на разстояніи y отъ вала и пусть скорость жидкости въ этой точкѣ u. Если p означаетъ давленіе, то можно доказать, что $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$ . . . . (1), если μ есть коэффиціентъ вязкости смазки, u_0—линейная скорость вала, а u скорость въ нѣкоторой точкѣ жидкости; мы не имѣемъ здѣсь возможности привести доказательство, но прямо скажемъ, что (1) можетъ быть приведено къ виду



Черт. 103.

$$\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{3}{h} \cdot \frac{dh}{dx}\frac{dp}{dx} + \frac{6\mu u_0}{h^3}\frac{dh}{dx} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (2).$$

Пусть
$$\frac{dp}{dx} = \varphi,$$

тогда
$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{3}{h} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \varphi + \frac{6\mu u_0}{h^3}\frac{dh}{dx} = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ форму (1) п. 243, если h дано въ зависимости отъ x.

Пусть $X = \int P . dx = \int \frac{3}{h} \cdot \frac{dh}{dx} . dx = 3 \log h$, $e^X = h^3$. Отсюда

$$\varphi = h^{-3}\left\{\int - h^3 \frac{6\mu u_0}{h^3}\frac{dh}{dx}\, dx + C\right\}, \; -\varphi = -\frac{dp}{dx} = h^{-3}(6\mu u_0 h + C) =$$
$$= \frac{6\mu u_0}{h^2} + \frac{C}{h^3}.$$

Рѣшеніе зависитъ отъ закона измѣненія h. На практикѣ можно принять съ нѣкоторымъ приближеніемъ, что: $h = h_0 + ax^2$: въ этомъ случаѣ мы получимъ

$$p = C' - \frac{6\mu u_0}{2h_0}\left(\frac{x}{h} + \frac{1}{\sqrt{ah_0}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{a}{h_0}}\right)$$
$$-C\left\{\frac{x}{h^2} + \frac{3}{2h_0}\left(\frac{x}{h} + \frac{1}{\sqrt{ah_0}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{a}{h_0}}\right)\right\},$$

$$p = C' - C\frac{x}{h^2} - \left(\frac{x}{h} + \frac{1}{\sqrt{ah_0}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{a}{h_0}}\right)\left(\frac{6\mu u_0}{2h_0} + \frac{3C}{2h_0}\right).$$

Если студенты имѣютъ возможность потратить нѣкоторое время на изученіе этого примѣра, то они могутъ обратиться къ статьѣ проф. О. Рейнольдса въ Phil. Trans. томъ 177, гдѣ онъ впервые объяснилъ инженерамъ теорію смазки.†

Численное упражненіе. Пусть $OB = 2.59$, $OA = 11.09$ сантиметровъ, $\mu = 2.16$, h_0 или $OC = 0{,}001135$, $a = 0{,}0000082$, $u_0 = 80$ сант. въ секунду.

Вычислить C и C', принимая $p = 0$ при B и A. Затѣмъ вычислите давленіе для различныхъ значеній x и нанесите его значенія на клѣтчатку. Такъ какъ сила тренія на квадратный сантиметръ равна $\mu \dfrac{du}{dy}$ при $y = 0$, то полное треніе F будетъ

$$-F = \int \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx + \mu u_0 \int \frac{dx}{h}$$

въ предѣлахъ между A и B. Полная нагрузка на валъ будетъ $\int p.dx$ между тѣми же предѣлами, если AB покрываетъ небольшую часть шейки вала, и можетъ быть въ любомъ случаѣ легко вычислена.

Опора предположена безконечно длинной по направленію перпендикулярному къ плоскости бумаги на черт. 103, но силы расчитываются на 1 сант. длины.

248. *Примѣръ.* Рѣшить уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 2e^{3x}.$$

Написавъ его въ видѣ $(\theta^2 - 4\theta + 3)\, y = 2e^{3x}$,
получимъ $$y = (\theta^2 - 4\theta + 3)^{-1}\, 2e^{3x}.$$

Но $$(\theta^2 - 4\theta + 3)^{-1} = {}^1/_2 \left(\frac{1}{\theta - 3} - \frac{1}{\theta - 1}\right).$$

Намъ незачѣмъ заботиться относительно множителя $^1/_2$, такъ какъ очевидно, что общее рѣшеніе будетъ равно суммѣ двухъ членовъ $(\theta - 3)^{-1}$ и $(\theta - 1)^{-1}$, изъ которыхъ каждое умножено на произвольное постоянное.

Какъ бы то нибыло, $y = \dfrac{e^{3x}}{\theta - 3} - \dfrac{e^{3x}}{\theta - 1}$,

а это по (7) п. 243 равно

$$(C + x)\, e^{3x} - [C'e^{x} + {}^1/_2\, e^{3x}],$$
$$y = (C_1 + x)\, e^{3x} + C_2 e^{x},$$

249. Уравненіе вида $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, гдѣ P и Q, какъ и раньше, суть функціи только x.

Раздѣлимъ обѣ части уравненія на y^n и подставимъ $z = y^{1-n}$ получимъ линейное уравненіе.

Примѣръ. $$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2.$$

Подставляя $z = y^{-1}$ найдемъ

$$\frac{dz}{dx} + \frac{xz}{1-x^2} = -\frac{ax}{1-x^2},$$

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -{}^1/_2 \log(1-x^2),$$

$$e^{-{}^1/_2 \log(1-x^2)} = (1-x^2)^{-{}^1/_2}$$

$$z = (1-x^2)^{{}^1/_2}\left\{\int (1-x^2)^{-{}^3/_2}(-ax)\,dx + C\right\}.$$

Отвѣтъ:

$$y^{-1} = (1-x^2)^{{}^1/_2}\left[-a(1-x^2)^{-{}^1/_2} + C\right] = -a + C\sqrt{1-x^2}.$$

Упражненіе. $$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x.$$

Отвѣтъ: $\dfrac{1}{y} = 1 + Cx + \log x.$

250. 1. Дано $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2y^2 = 0.$$

Это уравненіе **перваго порядка** и **второй степени**.

Рѣшимъ его относительно $\dfrac{dy}{dx}$ и получимъ два рѣшенія

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0, \text{ такъ что } \lg y - ax - A_1 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0, \text{ такъ что } \lg y + ax - A_2 = 0.$$

Отсюда получимъ рѣшеніе

$$(\log y - ax - A_1)(\log y + ax - A_2) = 0.$$

Легко убѣдиться, что каждое значеніе y заключаетъ въ себѣ только одно произвольное постоянное, хотя въ уравненіи ихъ два.

2. Дано $$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=x.$$

Это есть уравненіе **перваго порядка третьей степени.**

Отсюда $$\frac{dy}{dx}=(x-1)^{1/3},$$

и $$y={}^3/_4\,(x-1)^{4/3}+C.$$

3. Дано $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-7\frac{dy}{dx}+12=0.$$

Это уравненіе **перваго порядка второй степени.**

$$\left(\frac{dy}{dx}-4\right)\left(\frac{dy}{dx}-3\right)=0.$$

$$(y-4x+c_1)\,(y-3x+c_2)=0.$$

251. Уравненіе Клеро есть уравненіе перваго порядка любой степени.

$$y=xp+f(p)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

гдѣ p есть $\frac{dy}{dx}$, а $f(p)$ есть нѣкоторая функція отъ $\frac{dy}{dx}$.

Дифференцируемъ его по x, получимъ

$$\left\{x+\frac{d}{dp}f(p)\right\}\frac{dp}{dx}=0.\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Такимъ образомъ, или $\frac{dp}{dx}=0$. . . . . (3),

или $$x+\frac{d}{dp}f(p)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

должно удовлетворить нашему уравненію.

Если $$\frac{dp}{dx}=0,\ p=c.$$

Подставляя это въ (1), получимъ

$$y=cx+f(c)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5),$$

что и будетъ полнымъ рѣшеніемъ.

Исключая p изъ уравненія (1) и (4), мы получимъ другое рѣшеніе, не содержащее произвольной постоянной. Много можно было бы сказать относительно этого **особеннаго рѣшенія,** какъ его называютъ. Оно является результатомъ

исключенія c изъ семейства кривыхъ (5) и потому изображаетъ ихъ **обертку**. См. п. 224.

Примѣръ на уравненіе Клеро.

$$y = xp + \frac{m}{p}.$$

Мы имѣемъ общее рѣшеніе (5) ...... $y = cx + \frac{m}{c}$, семейство прямыхъ линій, члены котораго отличаются по значенію ихъ параметра c.

(4) представится въ видѣ $x = -\frac{d}{dp}\left(\frac{m}{p}\right)$ или $x = +\frac{m}{p^2}$ или $p = \sqrt{\frac{m}{x}}$.

Отсюда $y = 2\sqrt{mx}$ или $y^2 = 4mx$, — парабола, которая, какъ мы нашли въ п. 224, служитъ обертывающей для этого семейства.

Эта кривая удовлетворяетъ данному уравненію, такъ какъ на нѣкоторомъ безконечно маломъ протяженіи ея значенія x, y и $\frac{dy}{dx}$ тѣже, что и въ одномъ изъ членовъ семейства прямыхъ.

252. Если дифференціальное уравненіе имѣетъ видъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x),$$

оно можетъ быть рѣшено помощью **послѣдовательнаго интегрированія**. Мы уже имѣли нѣсколько подобныхъ примѣровъ.

253. Уравненіе вида $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$; умножаемъ на $2\frac{dy}{dx}$ и интегрируемъ, получимъ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y).dy + C.$$

Извлекаемъ квадратный корень и, отдѣливъ перемѣнныя, рѣшаемъ уравненіе.

Такъ пусть $$\frac{d^2y}{dx^2}=a^2y.$$

Поступаемъ по предыдущему:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int a^2y\,.\,dy+C=a^2y^2+C,$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{a^2y^2+C},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2+C}}=dx.$$

Интегрируя, находимъ

$$x=\frac{1}{a}\lg\left[ay+\sqrt{a^2y^2+C}\right]+C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .(1).$$

Если уравненіе (1) представимъ въ видѣ

$$ce^{ax}=ay+\sqrt{a^2y^2+C},$$

то оно получаетъ видъ $c^2e^{2ax}-2ayce^{ax}=C$,

$$y=\frac{c}{2a}e^{ax}-C'e^{-ax},$$

или $$y=Ae^{ax}+Be^{-ax} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

рѣшеніе, которое кажется непохожимъ на (1), хотя, въ дѣйствительности оно то же самое. (2) мы можемъ получить сразу, если будемъ держаться правила, даннаго для рѣшенія линейныхъ уравненій въ п. 159.

254. Рѣшить $\frac{d^3y}{dx^3}=a\frac{d^2y}{dx^2}$, уравненіе третьяго порядка первой степени.

Пусть $$\frac{d^2y}{dx^2}=q, \text{ тогда } \frac{dq}{dx}=aq,$$

$$q=be^{ax}, \text{ такъ что } \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}e^{ax}+C,$$

$$y=\frac{b}{a^2}e^{ax}+Cx+C',$$

или $y=Ae^{ax}+Cx+C'$, гдѣ A, C и C' суть произвольныя постоянныя. Это уравненіе также можетъ быть рѣшено по правилу для линейныхъ уравненій п. 159.

255. Рѣшить $a\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$,

$$a\frac{dp}{dx}=(1+p^2)^{1/2},\text{ если } p=\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{a\,.\,dp}{\sqrt{1+p^2}}=dx,\text{ такъ что }\frac{x}{a}=\lg\left[p+\sqrt{p^2+1}\right]+C'.$$

или
$$Ce^{\frac{x}{a}}-p=\sqrt{p^2+1}.$$

Возводя въ квадратъ, получимъ $p={}^1/_2\,Ce^{\frac{x}{a}}-\dfrac{1}{2C}e^{-\frac{x}{a}}=\dfrac{dy}{dx}$. Интегрируя, получаемъ

$$y=\frac{a}{2}Ce^{\frac{x}{a}}+\frac{a}{2C}e^{-\frac{a}{x}}+c,$$

гдѣ C и c суть произвольныя постоянныя.

256. Общія упражненія по дифференціальнымъ уравненіямъ.

(1) $(a^2+y^2)\,dx+\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dy=0.$

Отвѣтъ: $\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{a}=c.$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{1+x^2}y=-\dfrac{1}{2x\,(1+x^2)}.$

Отвѣтъ: $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left\{c-{}^1/_2\lg\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right\}.$

(3) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}.$

Отвѣтъ: $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}+y\right)=x\,(x+y).$

Отвѣтъ: $(2y-x^2-c)\,[\lg(x+y-1)+x-c]=0.$

(5) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=2ax^3y^3.$

Отвѣтъ: $y=\left[Ce^{2x^2}+{}^1/_2a\,(2x^2+1)\right]^{-1/2}.$

(6) $1=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{2x}{y}\frac{dy}{dx}$. Отвѣтъ: $y^2=2cx+c^2$.

(7) $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\lg x$. Отвѣтъ: $y=(cx+\lg x+1)^{-1}$.

(8) $y=2x\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$. Отвѣтъ: $y^2=2cx+c^3$.

(9) Рѣшить $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0$.

Во 1) способомъ, примѣненнымъ въ упражненіи п. 241, во 2), какъ однородное уравненіе.

Отвѣтъ: $x^2-y^2=cx$.

(10) Рѣшить $\frac{2x\,.\,dx}{y^3}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0$ по способу п. 241.

Отвѣтъ: $x^2-y^2=cy^3$.

(11) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

Отвѣтъ: $y=(x+1)^2\,[{}^1/{}_2(x+1)^2+C]$.

(12) $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2$. Отвѣтъ: $y-a\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}=c$.

(13) $xy\,(1+xy^2)\frac{dy}{dx}=1$. Отвѣтъ: $\frac{1}{x}=2-y^2+ce^{-{}^1/{}_2y^2}$.

(14) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{a^2}{x^2}=0$.

Отвѣтъ: $(y-a\lg x-c)\,(y+a\lg x-c)=0$.

(15) $\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=0$.

Отвѣтъ: $y=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\,e^{-x}$.

(16) $\frac{d^2x}{dt^2}-2f\frac{dx}{dt}+f^2x=e^t$

Отвѣтъ: $x=(a_1+a_2t)\,e^{ft}+\frac{e^t}{(f-1)^2}$.

(17) $\frac{dy}{dx}-\frac{ny}{x+1}=e^x(x+1)^n$.

Отвѣтъ: $y=(x+1)^n\,(e^x+c)$.

(18) $\frac{d\theta}{d\varphi}=\sin(\varphi-\theta)$. Отвѣтъ: $\cot g\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi-\theta}{2}\right\}-\varphi+c$.

(19) $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=axy^2$. Отвѣтъ: $\frac{1}{y}=c\sqrt{1-x^2}-a$.

(20) $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{dy}{dx}+4y=e^x\cos x$.

Отвѣтъ: $y=C_1e^{-2x}+e^x\left\{\left(C_2-\frac{x}{20}\right)\cos x+\left(C_3+\frac{3x}{20}\right)\sin x\right\}$

(21) Перемѣнить независимую перемѣнную x на t въ уравненіи $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$; принявъ $x=\sin t$, рѣшить уравненіе.

(22) Сдѣлать то же въ $(a^2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=0$, принявъ $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ и рѣшить уравненіе.

257. 1. Доказать, что $\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{d^2t}{ds^2}:\left(\frac{dt}{ds}\right)^3$,

и 2. $\frac{d^3s}{dt^3}=-\left\{\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^3t}{ds^3}-3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2\right\}:\left(\frac{dt}{ds}\right)^5$.

3. Доказать, что если $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, то будетъ также

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$

и найти эквивалентное выраженіе для $\frac{d^3y}{dx^3}$

4. Если $x=e^t$. показать, что, такъ какъ $x\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, то это равно $\frac{dy}{dt}$.

Также $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=\left(\frac{d}{dt}-1\right)\frac{dy}{dt},$$

и $$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\left(\frac{d}{dt}-2\right)\left(\frac{d}{dt}-1\right)\frac{dy}{dt}.$$

5. Перемѣнить независимую перемѣнную x на t, принявъ $x=e^t$, въ уравненіи $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$, и рѣшить его.

258. Если мы станемъ пробовать найти по методу п. 47 длину дуги эллипса, то мы встрѣтимся съ второго рода эллиптическимъ интеграломъ, который обозначается E (k, x). Онъ можетъ быть разложенъ въ безконечный рядъ. Его значеніе вычислено для величинъ k и x и приведено въ математическихъ таблицахъ.

Когда уголъ качанія маятника не достаточно малъ, и мы хотимъ опредѣлить продолжительность періода качанія, то мы встрѣчаемся съ эллиптическимъ интеграломъ перваго рода, который обозначается F (k x). Можно доказать, что интегралъ какого нибудь алгебраическаго, выраженія, заключающаго въ себѣ квадратный корень изъ многочлена третьей или четвертой степени, можетъ быть представленъ въ зависимости отъ одного или большаго числа изъ трехъ слѣдующихъ интеграловъ

$$F(k,x)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \text{или}\ F(k,\theta)=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};$$

$$E(k,x)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,.dx,\ \text{или}\ E(k,\theta)=\int_0^\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,.d\theta;$$

$$\pi(n,k,x)=\int_0^x\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \text{или}$$

$$\pi(n,k,\theta)=\int_0^\theta\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

k, всегда положительное и меньшее единицы, называется модулемъ n, нѣкоторое дѣйствительное число называется параметромъ.

Перемѣна вида x на видъ θ дѣлается помощью подстановки $x=\sin\theta$. Если предѣлы F и E суть 1 и 0, въ случаѣ x, или $\frac{\pi}{2}$ и 0, въ случаѣ θ, то интегралы называются полными и обозначаются просто буквами K и E. θ называется амплитудой, а $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ обозначается черезъ $\triangle\theta$.

Если $u=F(k,x)=F(k,\theta)$, то при обращеніи съ функціями, имѣющими одно и то же k, мы будемъ пользоваться обозначеніями:

$\theta=\operatorname{am} u$,

$x=\operatorname{sn} u$ (на словахъ, x есть синусъ амплитуды u),

$\sqrt{1-x^2}=\operatorname{cn} u$ (или $\sqrt{1-x^2}$ есть косинусъ амплитуды u),

$\sqrt{1-k^2x^2}=\operatorname{dn} u$ (или $\sqrt{1-k^2x^2}$ есть дельта амплитуды u);

можно доказать, что

$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$, $\mathrm{dn}^2 u + k^2 . \mathrm{sn}^2 u = 1$, $\frac{d}{du}(\mathrm{am}\ u) = \mathrm{dn}\, u$, и т. д.

Также $\mathrm{am}(-u) = -\mathrm{am}.\ u.$ и т. д.

Также $\mathrm{sn}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{sn}\, u . \mathrm{cn}\, v . \mathrm{dn}\, v \pm \mathrm{cn}\, u . \mathrm{sn}\, v . \mathrm{dn} . u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u . \mathrm{sn}^2 v}$

подобныя же отношенія получатся и для $\mathrm{cn}(u \pm v)$ и $\mathrm{dn}(u \pm v)$.

Отсюда находятся выраженія для $\mathrm{sn}(u+v) + \mathrm{sn}(u-v)$, и т. д. Также и для

$$\mathrm{sn} 2u,\ \mathrm{cn} 2u,\ \mathrm{dn} 2u.$$

Такимъ образомъ, имѣется столь же полное собраніе формулъ, связующихъ эти эллиптическія функціи, какъ и для тригонометрическихъ функцій; онѣ могутъ быть разложены въ ряды, по которымъ могутъ быть вычислены для нихъ таблицы. Лежандръ издалъ таблицы интеграловъ перваго и второго класса, и такъ какъ они находятся въ извѣстныхъ отношеніяхъ къ интеграламъ третьяго класса, то значенія этихъ послѣднихъ, а также различныхъ эллиптическихъ функцій могутъ быть изъ нихъ вычислены. Еслибы были составлены полныя таблицы ихъ, то возможно, что эти функціи получили бы практическое значеніе.

259. Вернемся къ **дифференцированію функцій отъ двухъ или бóльшаго числа перемѣнныхъ.**

1. Если $u = z^2 + y^3 + zy$, а $z = \sin x$ и $y = e^x$,

тогда $\left(\frac{du}{dy}\right) = 3y^2 + z, \left(\frac{du}{dz}\right) = 2z + y, \frac{dy}{dx} = e^x, \frac{dz}{dx} = \cos x,$

и отсюда $\frac{du}{dx} = (3y^2 + z)\, e^x + (2z + y) \cos x$. Если это выразимъ въ зависимости только отъ x, то мы получимъ такой же отвѣтъ, какой получили бы, еслибы въ началѣ въ u подставили вмѣсто y и z ихъ выраженія черезъ x и непосредственно дифференцировали.

2. Положимъ, $u = \sqrt{\dfrac{v^2 - w^2}{v^2 + w^2}}$, гдѣ v и w суть функціи x, найти $\frac{du}{dx}$.

3. $\sin(xy) = mx$, найти $\frac{dy}{dx}$.

4. $u = \mathrm{arc}\sin \frac{z}{y}$, гдѣ z и y суть функціи x, найти $\frac{dy}{dx}$.

5. $u = \operatorname{arctg}\frac{z}{y}$, показать, что $du = \frac{y.dz - z.dy}{y^2 + z^2}$.

260. *Упражненіе.* Повѣримъ, дѣйствительно ли уравненіе

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{dv}{dt} \qquad \qquad (1)$$

имѣетъ такое рѣшеніе: $v = e^{ax}\sin(qt + \gamma x)$, и, если это такъ то найдемъ α и γ, примѣняясь къ тому случаю, когда $v = 0$ при $x = \infty$ и $v = a\sin qt$ при $x = 0$. Мы отбрасываемъ скобки въ $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ и т. д.

$$\frac{dv}{dx} = \alpha e^{ax}\sin(qt + \gamma x) + e^{ax}\gamma\cos(qt + \gamma x),$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \alpha^2 e^{ax}\sin(qt + \gamma x) + \alpha\gamma e^{ax}\cos(qt + \gamma x)$$

$$+ \alpha\gamma e^{ax}\cos(qt + \gamma x) - e^{ax}\gamma^2\sin(qt + \gamma x).$$

Также $$\frac{dv}{dt} = qe^{ax}\cos(qt + \gamma x).$$

Такимъ образомъ, чтобы было удовлетворено уравненіе (1) для всѣхъ значеній t и x, должно быть

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 0 \text{ или } \alpha = \pm\gamma,$$

и $$\alpha\gamma + \alpha\gamma = \frac{q}{\varkappa}.$$

Такъ какъ $\frac{q}{\varkappa}$ не равно 0, то α можетъ быть равно только $+\gamma$

$$2\alpha^2 = \frac{q}{\varkappa}, \quad \alpha = \pm\sqrt{\frac{q}{2\varkappa}} = \gamma.$$

Отсюда мы получимъ

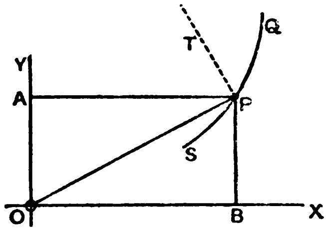
$$v = Ae^{ax}\sin(qt + \alpha x) + Be^{-ax}\sin(qt - \alpha x),$$

гдѣ A и B суть нѣкоторыя постоянныя, а $\alpha = \sqrt{\frac{2\pi n}{2\varkappa}}$ или $\sqrt{\frac{\pi n}{\varkappa}}$, если $q = 2\pi n$. Но если $v = 0$ при $x = \infty$, то очевидно $A = 0$. Если $v = a\sin qt$ при $x = 0$, то очевидно $B = a$.

Отсюда рѣшеніе будетъ:

$$v = ae^{-x\sqrt{\frac{\pi n}{\varkappa}}}\sin\left(2\pi nt - x\sqrt{\frac{\pi n}{\varkappa}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

261. Положимъ, что **точка** P **движется по криволинейному пути** SPQ; пусть $AP = x$, $BP = y$,



Черт. 104.

$\frac{dx}{dt}$ и $\frac{py}{dt}$ скорости по направленіямъ OX и OY,

$\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$ ускоренія по направленіямъ OX и OY.

Пусть $OP = r$, $BOP = \theta$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Ускореніе и скорость P въ какомъ либо направленіи можно получить тѣмъ же способомъ, которымъ мы пользуемся при разложеніи силъ. Такъ, скорость въ направленіи r будетъ

$$\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

а въ направленіи PT, которое составляетъ прямой уголъ съ r, скорость будетъ

$$-\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Дифференцируя x и y, какъ функціи перемѣнныхъ r и θ, такъ какъ $\left(\frac{dx}{dr}\right) = \cos\theta$ и $\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = -r\sin\theta$,

мы получимъ $$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Рѣшая (3) и (4) относительно $\frac{dr}{dt}$ и $r\frac{d\theta}{dt}$, мы находимъ

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}\cos\theta+\frac{dy}{dt}\sin\theta\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(5),$$

$$r\frac{d\theta}{dt}=-\frac{dx}{dt}\sin\theta+\frac{dy}{dt}\cos\theta\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(6).$$

На основаніи (1) и (2) мы заключаемъ, что $\frac{dr}{dt}$ есть скорость въ направленіи OP, а $r\frac{d\theta}{dt}$ есть скорость въ направленіи PT. Нѣкоторые читатели конечно подумаютъ надъ этимъ вопросомъ.

Теперь, если мы сложимъ ускоренія по направленіямъ OP и PT такъ же, какъ мы это сдѣлали со скоростями, и если мы снова продифференцируемъ (3) и (4) по t, то найдемъ:

$$\text{ускореніе по направленію } OP=\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta+$$
$$+\frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(7),$$

$$\text{ускореніе по направленію } PT=-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta+$$
$$+\frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(8).$$

и $$\frac{d^2x}{dt^2}=\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\cos\theta-\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\sin\theta.\quad(9),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\sin\theta+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\cos\theta\,.\quad(10).$$

Отсюда ускореніе въ направленіи r (а это безъ нашего доказательства не кажется очевиднымъ), будетъ

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(11),$$

а ускореніе по направленію PT,

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2},\ \text{или}\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\,.\,.\,.\quad(12),$$

$r^2\frac{d\theta}{dt}$ обыкновенно обозначается h. Оно очевидно означаетъ

двойную площадь, описанную въ секунду радіусомъ векторомъ; (12) приметъ видъ $\frac{1}{r}\frac{dh}{dt}$.

262. Положимъ, что сила, обусловливающая движеніе, есть **центральная сила**, притяженіе въ направленіи PO, представляющее нѣкоторую функцію отъ r, положимъ $f(r)$, на единицу массы въ P или $mf(r)$ на массу m въ точкѣ P; тогда (12) будетъ равно 0, или $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ = постоянной, иначе говоря, h — постоянно. Отсюда слѣдуетъ, что подъ вліяніемъ центральной силы радіусъ векторъ описываетъ въ равныя времена равныя площади.

Приравнивая $mf(r)$ массѣ, умноженной на ускореніе въ направленіи PO, мы получимъ

$$f(r) = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2r}{dt^2} \quad \ldots\ldots (13).$$

Но $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ — постоянно. Такъ какъ r есть функція θ, то

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2},$$

а

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left\{\frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{h}{r^2} - 2\frac{h}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}\frac{h}{r^2},$$

и мы можемъ воспользоваться этими величинами, чтобы исключить t изъ (13).

Если мы обозначимъ r черезъ $\frac{1}{u}$, то (13) приметъ болѣе простой видъ

$$f(r) = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \quad \ldots\ldots (14).$$

Если $f(r) = ar^{-n}$ или au^n, т. е. притяженіе измѣняется обратно пропорціонально n=й степени разстоянія, то $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{a}{h^2}u^{n-2} =$, положимъ, bu^{n-2}.

Умножая на $2\frac{du}{d\theta}$ и интегрируя, получимъ

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2b}{n-1}u^{n-1} + c \quad . \; . \; . \; (15).$$

Такъ, напримѣръ, положимъ, дѣйствіе **обратно пропорціонально квадратамъ** разстояній, тогда $f\,(r) = ar^{-2} = au^2$; (14) получитъ видъ

$$au^2 = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right),$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{a}{h^2} =, \text{ положимъ}, b.$$

Пусть $w = u - b$, тогда

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = 0.$$

Рѣшеніе этого уравненія будетъ

$$w = A \cos\,(\theta + B),$$

что можетъ быть написано такъ:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{a}{h^2}\left[1 + e\cos\left(\theta - \alpha\right)\right] \quad . \; . \; (16).$$

Это есть уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ, когда фокусъ служитъ полюсомъ. Видъ коническаго сѣченія зависитъ отъ начальныхъ условій.

(15) даетъ намъ возможность **при данномъ видѣ траекторіи** найти законъ центральной силы, обусловливающей ее. Такъ, если частица описываетъ эллипсъ подъ вліяніемъ притяженія, всегда направленнаго къ центру, то легко убѣдиться, что сила притяженія пропорціональна разстоянію. Нѣтъ ничего легче, какъ найти траекторію, если данъ подобный законъ. Такъ, если сила пропорціональна PO, то ея проекція на ось x-овъ пропорціональна x и проекція на ось y-овъ пропорціональна y. Если написать выраженія для ускореній по этимъ направленіямъ, то легко найти, что по нимъ будутъ совершаться два простыя гармоническія дви-

женія равнаго періода, а сложеніе этихъ движеній дастъ, какъ извѣстно, движеніе по эллипсу. Если притяженіе подчиняется закону **обратныхъ кубовъ** или $f(r) = ar^{-3} = au^3$,

то (14) приметъ видъ $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{a}{h^2}\, u$.

Если $\frac{a}{h^2} - 1 = \alpha^2$, $u = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}$.

Если $1 - \frac{a}{h^2} = \beta^2$, то $u = A \sin \beta\theta = B \cos \beta\theta$,—уравненія, дающія совершенно различныя рѣшенія въ зависимости отъ начальныхъ условій движенія.

263. Если $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, и если y есть функція x, то r будетъ функціей θ; если u есть функція x и y, то оно будетъ также функціей r и θ.

Выразить $\left(\frac{du}{dx}\right)$ и $\left(\frac{du}{dy}\right)$ въ функціи полярныхъ координатъ r и θ.

$$\left(\frac{du}{dr}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dr} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dr} \quad \ldots \quad (1)$$

полагая θ постояннымъ, и

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{d\theta} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

принимая за постоянное r.

Но $\frac{dx}{d\theta}$, если r постоянно, $= r\sin\theta$,

$\frac{dy}{d\theta}$, если r постоянно, $= r\cos\theta$,

$\frac{dx}{dr}$, если θ постоянно, $= \cos\theta$,

$\frac{dy}{dr}$, если θ постоянно, $= \sin\theta$.

Принимаемъ въ (1) и (2) за неизвѣстныя $\left(\frac{du}{dx}\right)$ и $\left(\frac{du}{dy}\right)$ и, рѣшая эти уравненія, находимъ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=\cos\theta\,.\left(\frac{du}{dr}\right)-\frac{1}{r}\sin\theta\,.\left(\frac{du}{d\theta}\right)\;\ldots\ldots\;(3).$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\sin\theta\,.\left(\frac{du}{dr}\right)+\frac{1}{r}\cos\theta\,.\left(\frac{du}{d\theta}\right)\;\ldots\ldots\;(4).$$

Замѣтимъ, что въ $\left(\frac{du}{dx}\right)$ скобки означаютъ, что y предположено при дифференцированіи постояннымъ.

Въ $\left(\frac{du}{dr}\right)$ предположено постояннымъ θ.

Поступите съ $\left(\frac{du}{dx}\right)$ и $\left(\frac{du}{dy}\right)$ въ (3) и (4), такъ же, какъ вы поступили съ u, и опредѣлите $\frac{d^2u}{dx^2}$ и $\frac{d^2u}{dy^2}$. Даже при самомъ тщательномъ отношеніи къ дѣлу всегда могутъ проскользнуть ошибки, и потому самая полезная практика будетъ та, когда каждый шагъ будетъ тщательно обдуманъ. Доказать, что

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}\;\ldots\ldots\;(5).$$

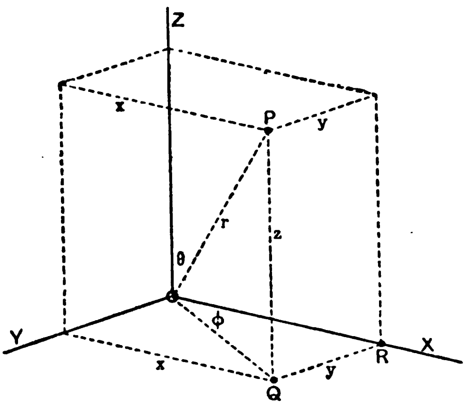
264. Иногда для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ мы, вмѣсто x, y и z, пользуемся координатами r, θ и φ. Вообразимъ, что центръ земли находится въ точкѣ O (черт. 105). OZ — земная ось, OX — линія, перпендикулярная къ OZ, причемъ плоскость ZOX проходитъ черезъ Гринвичъ, OY—линія, перпедикулярная къ обѣимъ предыдущимъ линіямъ. Положеніе точки P опредѣляется x — ея разстояніемъ отъ плоскости ZOY, y — разстояніемъ отъ плоскости ZOX и z — разстояніемъ ея отъ экваторіальной плоскости YOX. Пусть r будетъ OP разстояніе точки отъ O. Пусть φ будетъ западная долгота или уголъ между плоскостями POZ и XOZ, или, если Q основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ P на XOY, то φ есть уголъ QOX. Пусть θ будетъ дополненіе широты или

уголъ POZ. Теперь для всякаго, знающаго практическую геометрію, легко видѣть, что, проведя на чертежѣ линіи такъ, чтобы уголъ QRO былъ прямой, а, слѣдовательно, $QR=y$ и $OR=x$, и принимая во вниманіе, что уголъ PQO прямой, мы получимъ, что $x=r\sin\theta.\cos\varphi$, $y=r\sin\theta.\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$. Если u есть данная функція x, y и z, она можетъ быть выражена и въ зависимости отъ r, θ и φ помощью соотвѣтствующихъ подстановокъ. Прекраснымъ упражненіемъ можетъ послужить доказательство того, что

$$\frac{du}{dx}=\sin\theta\cos\varphi\,\frac{du}{dr}+\frac{\cos\theta.\cos\varphi}{r}\frac{du}{d\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{du}{d\varphi},$$

$$\frac{du}{dy}=\sin\theta\,\sin\varphi\,\frac{du}{dr}+\frac{\cos\theta.\sin\varphi}{r}\frac{du}{d\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\,\sin\theta}.\frac{du}{d\varphi},$$

$$\frac{du}{dz}=\cos\,\theta\,\frac{du}{dr}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{du}{d\theta}.$$



Черт. 105.

Замѣтьте, какъ легко привыкнуть пропускать скобки, означающія частное дифференцированіе.

Студентъ среднихъ способностей не будетъ имѣть тер-

пѣнія, а можетъ быть и не съумѣетъ сдѣлать достаточно аккуратно выводъ слѣдующаго соотношенія

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta}\cdot\ .\ .\ .\ .\ (A).$$

Это соотношеніе имѣетъ весьма большое практическое значеніе.

265. Основаніемъ для многихъ практическихъ работъ служитъ хорошее знакомство съ уравненіемъ

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{du}{dt}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

гдѣ t есть время. Напримѣръ, намъ приходится рѣшать уравненіе (1) въ задачахъ, касающихся проводимости теплоты, если u есть температура, или въ случаѣ $\frac{du}{dt}=0$, когда u есть электрическій или магнитный потенціалъ, или потенціалъ скорости въ гидродинамикѣ.

(1) обыкновенно пишутъ такъ:

$$\nabla^2u=\frac{1}{\varkappa}\frac{du}{dt}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Уравненіе (A) даетъ намъ ту форму, которую принимаетъ ∇^2u, когда оно выражено въ зависимости отъ координатъ r, θ и φ.

Ясно, что если u симметрично относительно оси z, т. е. если u не зависитъ отъ φ, то вышеприведенное выраженіе приметъ видъ

$$\nabla^2u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta}\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

266. Студентамъ предлагается разработать самымъ тщательнымъ образомъ всѣ детали слѣдующаго длиннаго примѣра. Чѣмъ больше времени будетъ употреблено на это, тѣмъ лучше. Этотъ примѣръ заключаетъ въ себѣ всю суть

теоріи **зонально-сферическихъ гармоническихъ функцій**, столь полезныхъ въ практическихъ задачахъ по теплотѣ, магнетизму, электричеству, гидродинамикѣ и тяготѣнію. Если u не зависитъ отъ φ, то мы иногда пишемъ (2) въ формѣ

$$\frac{du}{dt}=\frac{\varkappa}{r^2}\left\{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right)\right\} \quad \ldots\ldots (1),$$

причемъ u функція времени t, r и θ. Студентъ долженъ провѣрить, согласна ли эта формула съ (3).

Показать, что если $\frac{du}{dt}=0$, то уравненіе получаетъ видъ

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2}+2r\frac{du}{dr}+\cot\theta\frac{du}{d\theta}+\frac{d^2u}{d\theta^2}=0 \quad \ldots\ldots (2).$$

Попробуемъ, нѣтъ ли рѣшенія этого уравненія вида $u=RP$, гдѣ R есть функція только r, а P есть функція только θ; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2r}{R}\frac{dR}{dr}=-\cot\theta\frac{1}{P}\frac{dP}{d\theta}-\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\theta^2} \quad \ldots (3)$$

Здѣсь лѣвая часть уравненія содержитъ только r безъ θ, а правая только θ безъ r. Слѣдовательно, каждая изъ нихъ должна быть равна постоянной величинѣ. Назовемъ эту постоянную C, тогда будемъ имѣть

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{RC}{r^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (4),$$

$$\frac{d^2P}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dP}{d\theta}+PC=0 \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Здѣсь есть только одно ограничивающее условіе, касающееся величины C, которая должна быть одна и та же для (4) и (5); тогда произведеніе двухъ рѣшеній дастъ величину, удовлетворяющую уравненію (2). Для многихъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій рѣшенія получаются подобнымъ образомъ въ видѣ произведеній. Есть безчисленное множество и другихъ рѣшеній, но для насъ эти имѣютъ большое практическое значеніе.

Такимъ образомъ рѣшеніе частнаго дифференціальнаго уравненія (1) мы привели къ рѣшенію двухъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (4) и (5). Помощью пробъ мы находимъ одно рѣшеніе (4), именно, r^m, и для этого случая имѣется методъ (см. п. 268), на основаніи котораго можно получить общее рѣшеніе.

$$R = Ar^m + Br^{-(m+1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

гдѣ $C = m(m+1)$; не трудно убѣдиться, что (6) удовлетворяетъ данному уравненію. Принимая то же C въ (5) и полагая $\cos\theta = \mu$, мы получаемъ уравненіе, называемое уравненіемъ Лежандра, простое линейное уравненіе 2-го порядка

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right\} + m(m+1)P = 0 \quad \ldots \quad (7),$$

Теперь мы находимъ удобнымъ ограничить величину m. Пусть m — положительное, цѣлое число; пробуемъ, не будетъ ли рѣшеніе (7) выражаться въ формѣ

$$P = 1 + A_1\mu + A_2\mu^2 + A_3\mu^3 + \text{и т. д.}$$

Обозначая его $P_m(\mu)$ или $P_m(\theta)$, найдемъ слѣдующія рѣшенія:

$P_0(\theta) = 1$, если $m = 0$, $\quad P_1(\theta) = \mu$, если $m = 1$,
$P_2(\theta) = {}^3/_2\mu^2 - {}^1/_2$, если $m = 2$, $P_3(\theta) = {}^5/_2\mu^3 - {}^3/_2\mu$, если $m = 3$
$P_4(\theta) = {}^{35}/_8\mu^4 - {}^{30}/_8\mu^2 + 3$, если $m = 4$.

Для студента будетъ прекраснымъ упражненіемъ вычисленіе этихъ величинъ до P_9. Мои ученики составили таблицы величинъ P_0, P_1, P_2 и т. д. до P_7, для каждаго градуса отъ $\theta = 0$ до $\theta = 180°$. См. Proceedings of the Physical Society, Лондонъ, ноября 14, 1890 года, гдѣ даны ясныя указанія для примѣненія зональныхъ гармоническихъ функцій при рѣшеніи практическихъ задачъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что

$$\left(Ar^m + \frac{B}{r^{m+1}}\right)P_m(\theta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

представляетъ рѣшеніе (1). Практическая задача обыкновенно заключается въ слѣдующемъ: найти u, удовлетворяющее (1) и еще нѣкоторымъ ограничивающимъ условіямъ. Въ большинствѣ случаевъ приходится голько сложить вмѣстѣ члены подобные (8), чтобы получить полное искомое рѣшеніе.

Я считаю излишнимъ распространяться въ настоящей книгѣ объ этомъ предметѣ далѣе этого упражненія, которое можетъ служить прекраснымъ примѣромъ легкаго дифференцированія.

(8) обыкновенно называется **объемной зональной гармонической функціей m-й степени, а $P_m(\theta)$ называется поверхностной зональной гармонической функціей m-й степени.**

267. Во многихъ задачахъ осевое движеніе u бываетъ функціей только времени, а r означаетъ разстояніе нѣкоторой точки отъ оси; въ этомъ случаѣ приходится искать рѣшенія уравненія (1), которое принимаетъ видъ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=\frac{1}{\varkappa}\frac{du}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Какъ и раньше, предположимъ, что рѣшеніе имѣетъ видъ

$$u=RT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

гдѣ R есть функція только r, а T функція только t. (1) принимаетъ видъ

$$T\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\,T\frac{dR}{dr}=\frac{1}{\varkappa}\,R\frac{dT}{dt}.$$

Дѣлимъ на RT,

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr}=\frac{1}{\varkappa}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\text{положимъ},-\mu^2,$$

гдѣ μ^2 — постоянное.

Тогда $\frac{dT}{T}=-\varkappa\mu^2dt$ или $\lg T=-\varkappa\mu^2t+c$,

$$\text{или } T=Ce^{-x\mu^2t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

гдѣ C — произвольное постоянное. Теперь мы должны рѣшить уравненіе

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\mu^2R=0 \; \ldots\ldots\ldots \; (4).$$

Пусть $r=\frac{x}{\mu}$, тогда (4) приметъ видъ

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+R=0 \; \ldots\ldots\ldots \; (5).$$

Предположимъ, что рѣшеніе (5) будетъ имѣть видъ

$R=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+Fx^6+Gx^7+$ и т. д. мы найдемъ, что $A=C=E=G=0$, и что

$$R=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^24^2}-\frac{x^6}{2^24^26^2}+\frac{x^8}{2^24^26^28^2}-\text{и т. д.}\ldots (6)$$

Этотъ важный рядъ впервые былъ примѣненъ Фурье, хотя и носитъ имя Бесселя. Онъ названъ функціей **Zeroth Bessel** и для обозначенія ея употребляется символъ $J_0\,(x)$. Изданы таблицы, которыя даютъ возможность для любого значенія x найти $J_0\,(x)$. Такимъ образомъ $R=J_0\,(\mu r)$ будетъ рѣшеніемъ (4), а отсюда

$$u=Ce^{-\kappa\mu^2t}J_0\,(\mu r) \; \ldots\ldots\ldots \; (7)$$

будетъ рѣшеніемъ (1). Рѣшеніе (1), требуемое въ практическихъ задачахъ обыкновенно составляется изъ суммы членовъ, подобныхъ (7), въ которыхъ различныя значенія μ и C выбираются соотвѣтственно заданнымъ условіямъ.

268. Въ линейномъ дифференціальномъ уравненіи

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \; \ldots\ldots\ldots \; (1),$$

гдѣ P и Q суть функціи x, **если мы знаемъ одно частное рѣшеніе**, положимъ, $y=v$, то **мы можемъ найти и общее рѣшеніе.**

Подставимъ $y=vu$, тогда получимъ

$$v\frac{d^2u}{dx^2}+\left(2\frac{dv}{dx}+Pv\right)\frac{du}{dx}=0 \; \ldots\ldots \; (2).$$

Обозначая $\frac{du}{dx} = u'$, получимъ (2) въ видѣ

$$v\frac{du'}{dx} + \left(2\frac{dv}{dx} + Pv\right)u' = 0,$$

или
$$\frac{du'}{u'} + 2\frac{dv}{v} + P.dx = 0,$$

или
$$\lg u' + \lg v^2 + \int P.dx = \text{постоянному}.$$

Пусть $\int P.dx = X$, тогда u' или $\frac{du}{dx} = A\frac{1}{v^2}e^{-X}$.

$$u = B + A\int\frac{1}{v^2}e^{-X}.dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Такимъ образомъ, мы находимъ общее рѣшеніе

$$y = Bv + Av\int\frac{1}{v^2}e^{-X}.dx. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

гдѣ A и B произвольныя постоянныя. Даже, если правая часть уравненія (1) не нуль, вышеуказанная подстановка даетъ возможность найти рѣшеніе, если v будетъ рѣшеніе для того случая, когда правая часть есть нуль.

Легкій примѣръ. Одно рѣшеніе уравненія

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2x = 0 \text{ есть } y = \cos ax.$$

Найти общее рѣшеніе.

Здѣсь $P = 0$, такъ что $\int P.dx = X = 0$.

Отсюда $y = B\cos ax + A\cos ax\int\frac{dx}{\cos^2 ax}$, но,

такъ какъ
$$\int\frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax,$$

то общее рѣшеніе будетъ

$$y = B\cos ax + C\sin ax$$

Упражненіе. Помощью пробы мы находимъ, что $y = x^m$ будетъ одно изъ рѣшеній уравненія.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - m(m+1)y = 0 \text{ (см. п. 266)},$$

Показать, что общее рѣшеніе будетъ $y = Ax^m + \frac{B}{x^{m+1}}$.

Упражненіе. Помощью пробъ мы находимъ, что $y = e^{ax}$ будетъ однимъ изъ рѣшеній уравненія $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2y$; показать, что общее рѣшеніе будетъ $y = Ae^{ax} + Be^{-ax}$.

Упражненіе. Мы видѣли, что $u = P_m(\mu)$ есть одно изъ рѣшеній уравненія Лежандра п. 266, доказать, что $u = AP_m(\mu) + BQ_m(\mu)$ будетъ общимъ рѣшеніемъ, при чемъ

$$Q_m(\mu) = P_m(\mu) \int \frac{d\mu}{(1-\mu^2)\,[P_m(\mu)]^2}.$$

$Q_m(\mu)$ или $Q_m(\theta)$ называется **поверхностной зональной гармонической функціей второго рода.**

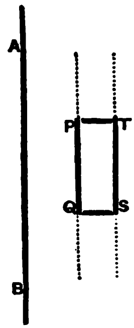
Упражненіе. Мы видѣли, что $J_0(x)$ было однимъ изъ рѣшеній уравненія Бесселя (5); показать, что общее рѣшеніе есть $AJ_0(x) + BK_0(x)$, гдѣ

$$K_0(x) = \int \frac{dx}{x\,[J_0(x)]^2},$$

K_0 (x) названо функціей Zeroth Bessel второго рода.

269. Проводимость тѣла. Положимъ, что тѣло, предполагаемое однороднымъ, имѣетъ плоскую поверхность AB. Если въ точкѣ P, находящейся на разстояніи x отъ AB, температура v, и мы предположимъ, что температура одинакова во всѣхъ точкахъ въ плоскости, проходящей черезъ P и параллельной AB, (т. е. мы разсматриваемъ только потокъ тепла, проходящій подъ прямымъ угломъ къ плоскости AB), и если $\frac{dv}{dx}$ есть величина повышенія температуры на сантиметръ длины въ точкѣ P, тогда $-k\frac{dv}{dx}$ изображаетъ ко-

личество теплоты, протекающее въ секунду черезъ квадратный сантиметръ площади PQ, въ направленіи увеличенія x. Таково опредѣленіе k—теплопроводности. Мы можемъ представить себѣ k постояннымъ. k есть количество теплоты, протекающей въ секунду черезъ квадратный сантиметръ, когда температурный градіентъ равенъ 1. Положимъ, что PQ въ точности имѣетъ площадь равную квадратному сантиметру. Каковъ будетъ потокъ, проходящій черезъ TS, иначе говоря, каково будетъ значеніе $-k\frac{dv}{dx}$ въ другой плоскости, которая отстоитъ отъ плоскости AB на разстояніи $x+\delta x$? Замѣтимъ, что $-k\frac{dv}{dx}$ есть функція x;



Черт. 106.

назовемъ ее для нѣкотораго момента $f(x)$, тогда объемъ $PQTS$ получаетъ въ секунду количество теплоты $f(x)$ и отдаетъ $f(x+\delta x)$.

Но $$f(x+\delta x)-f(x)=\delta x\frac{df(x)}{dx}.$$

Это выраженіе конечно будетъ абсолютно вѣрно только въ томъ случаѣ, если δx предполагается безгранично убывающимъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что $-\delta x\frac{d}{dx}f(x)$ получается объемомъ $PQTS$ въ секунду, а это равно

$$-\delta x\frac{d}{dx}\left(-k.\frac{dv}{dx}\right) \text{или} +k.\delta x\frac{d^2v}{dx^2}.$$

Но, объемъ равенъ $1\times\delta x$, и, если w означаетъ вѣсъ кубическаго сантиметра, а s есть удѣльная теплота или количество теплоты, требуемое для того, чтобы поднять температуру единицы вѣса на одинъ градусъ, то, если t есть время въ секундахъ,

$$w.\delta x.s\frac{dv}{dt}$$

также будетъ означать количество теплоты, получаемое въ секунду даннымъ объемомъ. Отсюда

$$k\,.\,\delta x\,.\,\frac{d^2v}{dx^2} = w\,.\,\delta x\,.\,s\,.\,\frac{dv}{dt},$$

или
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{ws}{k}\cdot\frac{dv}{dt} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (1).$$

Это есть **основное уравненіе** въ задачахъ, касающихся теплопроводимости. На изученіе его стоитъ потратить много времени и труда. Подобнымъ же образомъ мы приходимъ къ основнымъ уравненіямъ и въ электричествѣ и гидродинамикѣ.

Если потокъ не ограничивается однимъ направленіемъ, то мы должны получить уравненіе (1) п. 265. $\frac{k}{ws}$ часто называется **разсѣяніемъ** тепла въ веществѣ, и обозначается греческой буквой k; ws есть теплоемкость единицы объема вещества.

Напишемъ (1) такъ

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{k}\frac{dv}{dt} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (2).$$

270. Легко убѣдиться, что рѣшеній этого уравненія безчисленное множество, но между ними есть только одно, которое удовлетворяетъ частной задачѣ. Представимъ себѣ, что средняя температура въ любомъ мѣстѣ $= 0$ (не важно какая температура принята за нуль, такъ какъ въ наши вычисленія входятъ только разности температуръ) и что

$$V = a\sin 2\pi nt,\ \text{или}\ a\sin qt \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (3),$$

выражаетъ законъ измѣненія температуры въ тонкомъ слоѣ при $x = 0$; n или $\frac{q}{2\pi}$ означаетъ число полныхъ періодическихъ измѣненій въ секунду. Въ настоящее время мы уже тщательно изслѣдовали циклъ измѣненія температуры пара въ пространствѣ цилиндра паровой машины, и знаемъ, что съ достаточной точностью за основаніе расчета можно принять законъ простого гармоническаго движенія. Какой бы періодическій законъ мы не приняли, онъ всегда приведетъ насъ къ выраженію, состоящему изъ подобныхъ

этому членовъ, и, слѣдовательно, всякій сложный случай легко можетъ быть изученъ. Разсматривая тѣ весьма сложные процессы, которые происходятъ въ цилиндрѣ паровой машины, мы приходимъ къ заключенію, что законъ простого гармоническаго измѣненія температуры на поверхности металла вполнѣ можетъ быть принятъ за основаніе нашихъ выводовъ. Далѣе мы предполагаемъ, что, хотя колебанія температуры на поверхности металла значительно меньше колебаній температуры пара, однако они приблизительно пропорціональны и потому мы принимаемъ a пропорціональнымъ **колебаніямъ температуры** пара. Можно было бы не принимать въ расчетъ **воду, конденсирующуюся внутри цилиндра**, на стѣнкахъ его и на клапанахъ, предполагая, что эта вода сама собой независимо нагрѣвается и охлаждается; это нагрѣваніе и охлажденіе происходятъ съ огромной быстротой, и, чѣмъ меньше воды, тѣмъ лучше,—тѣмъ быстрѣе происходитъ обращеніе ея въ паръ. Но рядомъ съ этимъ процессомъ происходитъ еще то, что поверхностный слой этой воды на стѣнкахъ цилиндра дѣйствуетъ на металлъ въ томъ смыслѣ, что, увеличивая a, приближаетъ величину колебаній его температуры къ величинѣ колебаній температуры пара. Принятое нами n означаетъ число оборотовъ машины въ секунду.

Представляя себѣ подобнымъ образомъ эту задачу, мы на основаніи (2) п. 260 приходимъ къ выводу, что для любой точки и въ любой моментъ

$$v = ae^{-x\sqrt{\frac{\pi n}{\kappa}}} \sin\left(2\pi nt - x\sqrt{\frac{\pi n}{k}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . (4).$$

Таково будетъ рѣшеніе для того случая, когда имѣется неопредѣленнаго объема масса, ограниченная съ одной стороны плоскостью. Оно будетъ приблизительно вѣрно для цилиндра съ толстыми стѣнками, если наружная температура 0. Если же наружная температура равна v' и толщина стѣнки равна b, то намъ нужно только придать къ выраженію (4) величину $\frac{v'}{b}\,x$. Здѣсь обнаруживается вліяніе **паровой рубашки**, которое является тѣмъ большимъ, чѣмъ выше теплопроводность металла. Паровая рубашка также

вліяетъ и на уменьшеніе величины a. Слѣдуетъ тщательно изучить результаты, вытекающіе изъ даннагс здѣсь уравненія (4). Въ любой точкѣ, находящейся на глубинѣ x въ теченіи каждаго оборота машины происходитъ по закону простого гармоническаго движенія повышеніе и паденіе температуры; но предѣлы колебаній ея тѣмъ ниже, чѣмъ мы глубже возьмемъ эту точку. Замѣтимъ также, что чѣмъ глубже, тѣмъ больше запаздываніе фазы. Все это можно было наблюдать на термометрахъ, зарытыхъ въ землю въ Craigleith Quarry въ Эдинбургѣ. Наблюдались измѣненія температуры во 1-хъ, въ періодъ времени, состоящій изъ 24-хъ часовъ и во 2-хъ, въ годовой періодъ; мы приведемъ здѣсь годовыя періодическія измѣненія—какъ средній результатъ изъ восемнадцатилѣтнихъ наблюденій.

Глубина отъ поверхности въ футахъ	Годовыя колебанія температуры по фаренгейту	Время наивысшей температуры
3	16·138	Августа 14
6	12·296	« 26
12	8·432	Сентября 17
24	3·672	Ноября 7

Наблюденія на глубинѣ 24 футъ, произведенныя въ Calton Hill въ Эдинбургѣ, дали наивысшую температуру 6 Января.

Опредѣлимъ теперь изъ (4) количество теплоты, протекающей черезъ одинъ квадр. сантиметръ; т. е. вычислимъ для нѣкотораго момента величину $-k\,\dfrac{dv}{dx}$; обозначимъ $\sqrt{\dfrac{\pi n}{k}}$ черезъ α, тогда

$$\frac{dv}{dx} = -\alpha a e^{-\alpha x} \sin(2\pi n t - \alpha x) - \alpha a e^{-\alpha x} \cos(2\pi n t - \alpha x),$$

умножая это на—k, мы получимъ, что при $x=0$, т. е. на поверхности стѣнки

$$\left(-k\frac{dv}{dx}\right)_{x=0}=+k\alpha a\left[\sin 2\pi nt+\cos 2\pi nt\right]$$

$$=k\alpha a\sqrt{2}\sin\left(2\pi nt+\frac{\pi}{4}\right),\text{ на основаніи п. 116.}$$

Здѣсь будетъ знакъ $+$ для той половины періода, когда теплота течетъ внутрь металла, и знакъ—для второй половины періода, когда теплота течетъ изъ металла. Найдемъ, **какое количество ея протекаетъ внутрь** металла; оно должно быть равно количеству теплоты, вытекающей изъ металла. Очевидно оно равно

$$k\alpha a\sqrt{2}\int_0^{1/_2\tau}\sin 2\pi nt.dt=k\alpha a\sqrt{2}.\frac{\tau}{\pi}=a\sqrt{\frac{2kws}{n\pi}}.$$

при чемъ $\tau=\frac{1}{n}$.

Такимъ образомъ, оно обратно пропорціонально квадратному корню изъ скорости вращенія машины и прямо пропорціонально колебаніямъ температуры.

Здѣсь мы имѣемъ простой, точный математическій результатъ; не трудно понять, какъ имъ можно воспользоваться для рѣшенія какой либо задачи, въ которой явленія будутъ болѣе сложны. Этотъ выводъ даетъ намъ приблизительное понятіе о происходящихъ процессахъ. Такимъ образомъ, мы можемъ сдѣлать выводъ, что скрытая теплота, теряемая паромъ, бываетъ меньше, когда имѣется паровая рубашка, и когда производится осушеніе пара; потеря ея пропорціональна величинѣ колебаній температуры пара, степени впуска пара, и обратно пропорціональна квадратному корню изъ скорости. По всей вѣроятности, самымъ лучшимъ способомъ для уменьшенія ея было бы смѣшеніе пара съ нѣкоторой частью воздуха, горючаго газа или какого либо пара, менѣе способнаго конденсироваться, чѣмъ водяной паръ.

Если бы вмѣсто одного члена изъ ряда Фурье мы приняли нѣсколько членовъ, то пришли бы къ результату, что

количество потерянной паромъ теплоты за одинъ оборотъ поршня равно

$$(\theta_1-\theta_3)\left(b+\frac{c}{r}\right)A:\sqrt{n},$$

гдѣ θ_1—начальная температура, θ_3 температура пара при выпускѣ его, r—отношеніе, выражающее степень впуска пара, n—число оборотовъ въ минуту, A—площадь поршня, b и c постоянныя, величина которыхъ зависитъ отъ типа машины и отъ устройства приспособленій для осушенія и паровой рубашки†.

271. Для студентовъ весьма полезно имѣть при себѣ **списокъ интеграловъ.** Самое лучшее было бы, если бы они составили сами такой списокъ для ежедневнаго употребленія, но мы по собственному опыту убѣдились, что, если только онъ не вплетенъ въ какую либо справочную книжку, онъ всегда затеряется. Поэтому мы здѣсь печатаемъ такой списокъ. По необходимости здѣсь приходится повторять старое.

Основные случаи:

1. $\int x^m.dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}.$

2. $\int \frac{1}{x}.dx=\lg x.$

3. $\int e^x.dx=e^x.$

4. $\int a^x.dx=\frac{1}{\lg a}a^x.$

5. $\int \cos mx\ dx=\frac{1}{m}\sin mx.$

6. $\int \sin mx.dx=-\frac{1}{m}\cos mx.$

7. $\int \cot x.dx=\lg(\sin x).$

8. $\int \operatorname{tg} x.dx=-\lg(\cos x).$

9. $\int \operatorname{tg} x . \sec x . dx = \text{sce}\ x.$

10. $\int \sec^2 x . dx = \operatorname{tg} x.$

11. $\int \operatorname{cosec}^2 x . dx = -\operatorname{ctg} x.$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}.$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{a}.$

17*. $\int \cosh ax . dx = \frac{1}{a} \sinh ax.$

---

*) Отъ 17 до 23 мы пользуемся символами, называемыми гиперболическими синусами, косинусами и т. д.

$$\sinh x = {}^1/_2 (e^x - e^{-x}),\ \text{и}\ \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x},$$

$$\cosh x = {}^1/_2 (e^x + e^{-x}), \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \coth x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}.$$

Также, если $y = \sinh x$, то $x = \operatorname{arcsinh} y$.
Легко доказать, что

$$\sinh(a + b) = \sinh a . \cosh b + \cosh a . \sinh b,$$
$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a . \sinh b,$$
$$\sinh(a - b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b,$$
$$\cosh(a - b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b,$$
$$\sinh 2a = 2 \sinh a . \cosh a,$$
$$\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2 \cosh^2 a - 1,$$
$$= 2 \sinh^2 a + 1.$$

18. $\int \sinh ax . dx = \frac{1}{a} \cosh ax.$

19. $\int \operatorname{sech}^2 ax . dx = \frac{1}{a} \operatorname{tgh} ax.$

20. $\int \operatorname{cosech}^2 ax . dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cotgh} ax.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} = \lg [x + \sqrt{x^2 + a^2}].$

Если мы примемъ, что $\sqrt{-1}$ или i, какъ его называютъ, подчиняется алгебраическимъ правиламъ и $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и т. д., то мы можемъ написать, что $a + bi$ равно $r (\cos \theta + i \sin \theta)$, гдѣ $r^2 = a^2 + b^2$ и $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$. Легко извлечь корень n-й степени изъ $a + bi$: онъ равенъ $r^{1/n}\left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n}\right)$ и, прибавляя къ θ послѣдовательно по 2π, мы получимъ n n-ыхъ корней. Легко убѣдиться, что $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin\alpha$,

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Если $z = a + bi = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r . e^{i\theta}$

$$\lg z = \lg r + i\theta = \tfrac{1}{2} \lg (a^2 + b^2) + i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Эта величина неопредѣленна, такъ какъ $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ можетъ заключать въ себѣ любое число 2π, и дѣйствительно, неопредѣленность можно ожидать на основаніи того, что $e^{2\pi i} = 1$.

Очевидно, что $\cosh x = \cos ix$,

$$\sinh x = -i \sin ix.$$

Доказать, что, если $u = \operatorname{arcsinh} x$, или $x = \tfrac{1}{2} (e^u - e^{-u})$, то при u—положительномъ $e^u = x + \sqrt{1 + x^2}$, и потому $u = \operatorname{arcsinh} x = \lg (x + \sqrt{1 + x^2})$.

Подобнымъ же образомъ, $\operatorname{arccosh} x = \lg (x + \sqrt{x^2 - 1})$,

$$\operatorname{arctgh} x = \tfrac{1}{2} \lg \frac{1 + x}{1 - x},$$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} = \lg [x + \sqrt{x^2 - a^2}]$.

23. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctgh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \lg \frac{a+x}{a-x}$.

24. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \lg \frac{x-\alpha}{x-\beta}$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \operatorname{arcvers} \frac{x}{a}$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - a^2}} =$

$$= \frac{1}{a} \arcsin \frac{x-a}{x}.$$

26. $\int \sqrt{(a^2 - x^2)} . dx = {}^1/_2 x \sqrt{a^2 - x^2} + {}^1/_2 a^2 \arcsin \frac{x}{a}$.

27. $\int \sqrt{x^2 + a^2} . dx = {}^1/_2 x \sqrt{x^2 + a^2} +$

$$+ {}^1/_2 a^2 \lg [x + \sqrt{x^2 + a^2}].$$

28. $\int \sqrt{x^2 - a^2} . dx = {}^1/_2 x \sqrt{x^2 - a^2} -$

$$- {}^1/_2 a^2 \lg [x + \sqrt{x^2 - a^2}].$$

29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x}$ или $= \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}$.

$$\operatorname{arcsech} x = \lg\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right),$$

$$\operatorname{arccosech} x = \lg\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right).$$

Теперь сравнить

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x = \lg (x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arccosh} x = \lg (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x, \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctgh} x = {}^1/_2 \lg \frac{1+x}{1-x}.$$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a} \lg \frac{x}{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}.$

31. $\int \frac{1}{x}\sqrt{a^2 \pm x^2} \,.\, dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}.$

32. $\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - a^2} \,.\, dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x}.$

33. $\int \frac{x \,.\, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2}.$

34. $\int \frac{x \,.\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}.$

35. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} \,.\, dx = {}^1/_3 \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}.$

36. $\int x\sqrt{a^2 - x^2} \,.\, dx = -{}^1/_3 \sqrt{(a^2 - x^2)^3}.$

37. $\int \sqrt{2ax - x^2} \,.\, dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax - x^2} +$

$+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x - a}{a}.$

38. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$

39. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

40. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \,.\, dx = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}.$

41. $\int \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} \,.\, dx = \sqrt{(x+a)(x+b)} +$

$+ (a - b) \lg (\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}).$

42. $\int x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} \,.\, dx.$

1). Если $\frac{p}{q}$ цѣлое положительное число, то нужно разложить въ рядъ, перемножить и интегрировать по членно.

2). Полагаемъ $a+bx^n=y^q$, если же этого мало, то

3). Полагаемъ $ax^{-n}+b=y^q$. Эта подстановка также можетъ не дать легкаго рѣшенія.

43. $\int \arcsin x.dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

44. $\int x \lg x.dx = \frac{x^2}{2}(\lg x - {}^1/_2)$.

45. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\left(x-\frac{1}{a}\right)$.

46. $\int x^n e^{ax}.dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}.dx$.

Обратите вниманіе на этотъ первый примѣръ формулы приведенія, уменьшающей постепенно величину показателя n.

47. $\int \frac{e^{ax}}{x^m}dx = -\frac{1}{m-1}\frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + \frac{a}{m-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}}dx$.

48. $\int e^{ax}\lg x.dx = \frac{1}{a}e^{ax}\lg x - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx$.

49. $\int \frac{dx}{\cos x} = {}^1/_2 \lg \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \lg\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right\}$.

50. $\int \frac{dx}{\sin x} = \lg\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

51. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a-b}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}}$, если $a>b$,

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\lg\frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}, \text{ если } a<b.$$

52. $\int e^{cx} \sin ax \,.\, dx = \dfrac{e^{cx}(c \sin ax - a \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\, ax)}{a^2 + c^2}.$

53. $\int e^{cx} \cos ax \,.\, dx = \dfrac{e^{cx}(c \cos ax + a \sin ax)}{a^2 + c^2}.$

54. $\int \sin^n x \,.\, dx = -\dfrac{\cos x \,.\, \sin^{n-1} x}{n} + \dfrac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \,.\, dx.$

55. $\int \dfrac{dx}{\sin^n x} = -\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \dfrac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

56. $\int e^{ax} \sin^n x \,.\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + n^2} \sin^{n-1} x \,(a \sin x - n \cos x)$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \,.\, dx.$$

57*. $\int \sin mx \,.\, \sin nx \,.\, dx = \dfrac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} - \dfrac{\sin (m+n) x}{2(m+n)}.$

58. $\int \cos mx \,.\, \cos nx \,.\, dx = \dfrac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} + \dfrac{\sin (m+n) x}{2(m+n)}.$

59. $\int \sin mx \,.\, \cos nx \,.\, dx = -\dfrac{\cos (m+n) x}{2(m+n)} - \dfrac{\cos (m-n) x}{2(m-n)}.$

60. $\int \sin^2 nx \,.\, dx = {}^1/_2\, x - \dfrac{1}{4n} \sin 2nx.$

61. $\int \cos^2 nx \,.\, dx = \dfrac{1}{4n} \sin 2nx + {}^1/_2 x.$

Въ слѣдующихъ примѣрахъ (62 — 67) m и n предполагаются неравными цѣлыми числами.

62. $\int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} \sin mx \,.\, \sin nx \,.\, dx = 0.$

---

*) При интегрированіи этихъ произведеній (57 — 61) мы должны припомнить слѣдующія формулы:

$$2 \sin mx \,.\, \sin nx = \cos (m-n) x - \cos (m+n) x.$$
$$2 \cos mx \,.\, \cos nx = \cos (m-n) x + \cos (m+n) x.$$
$$2 \sin mx \cos nx = \sin (m+n) x + \sin (m-n) x.$$
$$\cos 2 nx = 2\cos^2 nx - 1 = 1 - 2 \sin^2 nx.$$

63. $\int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} \cos mx . \cos nx . dx = 0.$

64. $\int_0^{\pi} \sin^2 nx . dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^{\pi} \cos^2 nx . dx = \frac{\pi}{2},$ если n есть цѣлое число.

65. $\int_0^{2\pi} \sin mx . \cos nx . dx = 0.$

66. $\int_0^{\pi} \sin mx . \cos nx . dx = 0,$ если $m - n$ четное.

67. $\int_0^{\pi} \sin mx . \cos nx . dx = \frac{m}{m^2 - n^2},$ если $m - n$ нечетное.

68. $\int \sin^m x . \cos x . dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$

69. $\int \cos^m x . \sin x . dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}.$

На основаніи этого можно интегрировать любую нечетную степень $\cos x$ или $\sin x$, такъ какъ мы можемъ ее написать въ видѣ $(1 - \sin^2 x)^n \cos x$ или $(1 - \cos^2 x)^n \sin x$, и если мы сдѣлаемъ разложеніе, то получимъ члены вышеуказаннаго вида. Подобнымъ же образомъ можно интегрировать $\sin^p x . \cos^q x$, если одинъ изъ двухъ показателей p и q будетъ нечетнымъ.

70. $\int x^m \sin x . dx = - x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x . dx.$

71. $\int x^m \cos x . dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x . dx.$

72. $\int \frac{\sin x}{x^m} . dx = - \frac{1}{m-1} \frac{\sin x}{x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{\cos x}{x^{m-1}} dx.$

73. $\int \frac{\cos x}{x^m} dx = - \frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{x^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \int \frac{\sin x}{x^{m-1}} dx.$

74. $\int \operatorname{tg}^n x . dx = \frac{(\operatorname{tg} x)^{n-1}}{n-1} - \int (\operatorname{tg} x)^{n-2} . dx$

75. $\int x^n \arcsin x \,.\, dx = \frac{x^{n+1} \arcsin x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

76. $\int x^n \operatorname{arctg} x \,.\, dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arctg} x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2}.$

77. $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$

если $4ac > b^2$, $= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \lg \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}},$

если $4ac < b^2$, $= -\frac{2}{2cx+b},$ если $4ac = b^2$.

Если $X = a+bx+cx^2$ и $q = 4ac-b^2$, то

78. $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2cx+b}{qX} + \frac{2c}{q} \int \frac{dx}{X}.$

79. $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2cx+b}{q} \left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{qX} \right) + \frac{bc^2}{q^2} \int \frac{dx}{X}.$

80. $\int \frac{x\,.\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2a}{qX} - \frac{b}{q} \int \frac{dx}{X}.$

81. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a} \lg \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}.$

82. $\int \frac{dx}{x^2 X} = \frac{b}{2a^2} \lg \frac{X}{x^2} - \frac{1}{ax} + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a} \right) \int \frac{dx}{X}.$

83. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}.$

84. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(\alpha-\beta x)}} = \frac{2}{\sqrt{b\beta}} \arcsin \sqrt{\frac{\beta(a+bx)}{a\beta+bp}}.$

85. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{an} \operatorname{arcsec} \left(\frac{x^{\frac{n}{2}}}{a} \right).$

86. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = \frac{1}{an} \lg \frac{\sqrt{a^2+x^n}-a}{\sqrt{a^2+x^n}+a}.$$

87. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \lg \left(cx + \frac{b}{2} + \sqrt{c(a+bx+cx^2)}\right).$$

88. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}.$$

89. $\int \frac{(p+gx)}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ можетъ быть написано въ формѣ

$$\frac{g}{2c} \frac{(b+2cx)}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{2pc-gb}{2c} \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

и затѣмъ проинтегрировано.

90. Интегралъ вида $\int \frac{P+Q(ax+b)^{p|r}}{R+S(ax+b)^{q|r}} dx$, гдѣ P, Q, R и S суть раціональныя цѣлыя функціи x, можетъ быть приведенъ къ раціональному виду помощью подстановки $ax+b=v^r$.

91. Интегралъ вида $\int \frac{P+Q\sqrt{U}}{R+S\sqrt{U}} dx$, гдѣ U равно $a+$ $+bx+cx^2$, можетъ быть приведенъ къ раціональному виду, 1) когда b^2-4ac положительно и c отрицательно, подстановкой

$$\frac{\sqrt{-c}\sqrt{U}}{\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{2y}{1+y^2}.$$

2) Когда b^2-4ac положительно и c положительно, то

$$\frac{\sqrt{c}\sqrt{U}}{\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{2y}{1-y^2}.$$

3) Когда b^2-4ac отрицательно и a положительно, то

$$\frac{\sqrt{c}\sqrt{U}}{\sqrt{4ac-b^2}} = \frac{1+y^2}{1-y^2}.$$

Если $U = a + bx + cx^2$, $q = 4ac - b^2$, $S = \frac{4c}{q}$, то

92. $$\int \frac{dx}{U\sqrt{U}} = \frac{2(2cx+b)}{q\sqrt{U}}.$$

93. $$\int \frac{dx}{U^n\sqrt{U}} = \frac{2(2cx+b)\sqrt{U}}{(2n-1)q\,U^n} + \\ + \frac{2S(n-1)}{2n-1}\int \frac{dx}{U^{n-1}\sqrt{U}}.$$

94. $$\int \sqrt{U}\,.\,dx = \frac{(2cx+b)\sqrt{U}}{4c} + \frac{1}{2S}\int \frac{dx}{\sqrt{U}}.$$

95. $$\int U\sqrt{U}\,.\,dx = \frac{(2cx+b)\sqrt{U}}{8c}\left(U + \frac{3}{2S}\right) \\ + \frac{3}{8S^2}\int \frac{dx}{\sqrt{U}}.$$

96. $$\int U^n\sqrt{U}\,.\,dx = \frac{(2cx+b)\,U^n\sqrt{U}}{4(n+1)c} \\ + \frac{2n+1}{2(n+1)S}\int \frac{U^n\,.\,dx}{\sqrt{U}}.$$

97. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{U}} = \frac{\sqrt{U}}{c} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{U}}.$$

98. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{U}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ \lg\left\{\frac{\sqrt{U}+\sqrt{a}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right\},\ \text{если}$$

$$a > 0, = \frac{1}{\sqrt{-a}}\ \arcsin\left(\frac{bx+2a}{x\sqrt{b^2-4ac}}\right),\ \text{если}\ a<0,$$

$$= \frac{-2\sqrt{U}}{bx},\ \text{если}\ a = 0.$$

99. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{U}} = -\frac{\sqrt{U}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{U}}.$$

272. Рѣшенія многихъ задачъ по физикѣ получаются въ видѣ нѣкоторыхъ хорошо извѣстныхъ опредѣленныхъ интеграловъ, изъ которыхъ нѣкоторые приведены въ таблицахъ. Изученіе ихъ выходитъ за рамки настоящей книги. Я скажу нѣсколько словъ относительно **функціи гамма**, которая опредѣляется такъ

$$\int_0^\infty e^{-x} \,.\, x^{n-1} \,.\, dx = \Gamma(n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

По частямъ будетъ

$$\int e^{-x} \,.\, x^n \,.\, dx = -\, e^{-x} x^n + n \int e^{-x} \,.\, x^{n-1} \,.\, dx.$$

Вводя предѣлы, легко доказать что $-e^{-x} x^n$ равно 0 при $x = 0$ и $x = \infty$.

Слѣдовательно, $\int_0^\infty e^{-x} x^n \,.\, dx = n \int_0^\infty e^{-x} \,.\, x^{n-1} \,.\, dx$ . . (2).

Отсюда $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$
слѣдовательно, если n цѣлое число,

$$\Gamma(n+1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \; . \; . \; . \; . \; n = \underline{|n} \quad . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Замѣтимъ, что $\underline{|n}$ имѣетъ значеніе только при n цѣломъ, между тѣмъ какъ $\Gamma(n)$ есть функція для любого значенія n.

Таблицы значеній $\Gamma(n)$ вычислены, хотя мы не будемъ описывать способа ихъ вычисленія. Во многихъ книгахъ приводится изящное доказательство того, что

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

отсюда на основаніи (3) мы можемъ получить $\Gamma(3/2)$ или $\Gamma(-3/2)$ и т. д.

Весьма большое число полезныхъ опредѣленныхъ интеграловъ можетъ быть выражено помощью гамма функціи.

Такъ 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \,.\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \,.\, d\theta$

$$= {}^1/_2 \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) : \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

2. $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{m+1}\, dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

3. $\int_0 e^{-a2x2}\, dx = \frac{1}{2a}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi}.$

4. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = a^{-(n+1)}\Gamma(n+1).$

5. $\int_0^1 x^m \lg\left(\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}.$

6. $\int_0^\infty \frac{e^{-y}\,.\,dy}{2a\sqrt{y}} = \frac{1}{2a}\,\Gamma\,(1/2).$

7. $1/2 \int_0^1 y^{1/2l-1}\,(1-y)^{m-1}\,dy = \Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma(m):$

$:2\Gamma\left(\frac{l}{2}+m\right).$

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta\cos^q\theta\,.\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Слѣдующія примѣчанія слѣдуетъ прочесть въ связи съ текстомъ на страницѣ, номеръ которой указанъ передъ примѣчаніемъ. Точное мѣсто на страницѣ указывается знакомъ †.

Страница 3. Обыкновенныя предложенія въ геометріи должны поясняться чертежомъ. Лучшимъ признакомъ здоровья нашей расы можетъ служить тотъ фактъ, что хотя уже два поколѣнія британскихъ юношей учатся по Евклиду, подтачивая свои умственныя способности, но всетаки еще не утеряли ихъ. Доказательства Евклида кажутся на видъ логичными; но способные студенты знаютъ, что это только такъ кажется. Даже, если бы они были логичны, всетаки Евклидову философію можно преподавать только людямъ, способнымъ только къ сухой математикѣ. 95 процентовъ учащихся, которымъ она отравляетъ жизнь, настолько же мало способны интересоваться абстрактнымъ мышленіемъ, на сколько остальныя пять процентовъ способны къ оригинальной мысли.

Стран. 50. Есть болѣе точный методъ опредѣленія $\frac{dp}{dt}$, — описанный въ моей книгѣ о паровой машинѣ.

Стран. 56 (примѣръ 5). Это правило не можетъ быть примѣняемо для значеній x большихъ 16.

Стран. 74. Въ п. 39 я изложилъ изслѣдованія о дымогарныхъ трубкахъ, обыкновенно приводимыя въ учебникахъ, но самъ предпочитаю слѣдующій методъ; такъ какъ я съ нѣкоторыхъ поръ имѣю основаніе полагать, что, если по трубкѣ, имѣющей сѣченіе A и периметръ P, въ секунду протекаетъ W фунтовъ газу, то потеря теплоты въ секунду на единицу поверхности трубки пропорціональна $\frac{v\theta}{t}$, если t абсолютная температура газовъ и v скорость ихъ. Но $v \propto \frac{Wt}{A}$, такъ что потеря теплоты въ секунду пропорціональна $\frac{W\theta}{A}$.

Далѣе
$$-W.d\theta = CW\theta.\frac{dS}{A},$$
или
$$-A\frac{d\theta}{\theta} = C.dS,$$
или
$$-A\lg\theta + c = CS,$$

гдѣ c и C суть постоянныя. Какъ и раньше, это приводится къ

$$c = A \lg \theta_1, \quad S = \frac{A}{C} \lg \frac{\theta_1}{\theta}$$

Все $S = \frac{A}{C} \lg \frac{\theta_1}{\theta_2}$, такъ что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія получается въ видѣ

$$E = 1 - e^{-CS/A}.$$

Теперь если трубка имѣетъ периметръ P и длину l, S/A равно $\frac{Pl}{A}$ или $\frac{l}{m}$, гдѣ m есть такъ называемый гидравлическій радіусъ, такъ что

$$E = 1 - e^{-\frac{Cl}{m}}.$$

Это указываетъ на то, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія не зависитъ отъ количества протекающаго вещества, и я полагаю, что въ извѣстныхъ предѣлахъ это вѣрно, если предположить очень хорошую циркуляцію окружающей воды. Этотъ выводъ и подтверждающіе его опыты сообщены въ 1874 году проф. Осборномъ Рейнольдсомъ въ Манчестерскомъ философскомъ обществѣ.

М-ръ Стантонъ недавно (*Phil Trans.* 1897) опубликовалъ опыты, которые указываютъ на то, что этотъ принципъ можетъ привести къ значительному уменьшенію вѣса котловъ и поверхности нагрѣва, если пользоваться очень быстрой циркуляціей и тонкими трубками.

Стран. 110. Врядъ ли нужно здѣсь пояснять, что сжимающее напряженіе въ какой либо точкѣ сѣченія балки, какъ напр. $ACAC$ на черт. 47, равно $\frac{M}{I}z$, если z есть разстояніе (положимъ IH) точки на сжатой части отъ нейтральной оси AA. Нейтральная ось проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія. Если z отрицательно, то напряженіе будетъ вытягивающимъ. Наибольшія напряженія проявляются въ точкахъ съ наибольшими z. Балки равнаго сопротивленія суть такія, въ которыхъ въ каждомъ сѣченіи наибольшія напряженія одни и тѣ же.

Стран. 129. М-ръ Жоржъ Вильсонъ (*Proc. Royal Soc.*, 1897) описываетъ методъ рѣшенія самыхъ общихъ задачъ, касающихся неразрѣзныхъ балокъ, болѣе простой, чѣмъ остальные. Пусть будутъ опоры A, B, C, D, E. Представимъ себѣ, что остаются только опоры A и E, и опредѣлили прогибъ въ B, C и D. Далѣе, положимъ, что въ точкѣ B дѣйствуетъ какая либо сила, направленная снизу вверхъ, и опредѣлимъ прогибы въ точкахъ B, C и D. Продѣлаемъ же самое съ C и D. Эти данныя достаточны для того, чтобы вычислить искомые грузы въ B, C и D, которые заставятъ эти точки прогнуться до ихъ настоящихъ уровней.

Стран. 162. Для начинающихъ это будетъ концомъ I главы.

Стран. 171· Во всѣхъ случаяхъ, такимъ образомъ,

$$dH = k.dt + t\left(\frac{dp}{dt}\right)dv \ldots\ldots\ldots \quad (23^*).$$

Упражненiе 1. Помощью (23) выразить K, l, L, P и V въ зависимости отъ k и написать самый общiй видъ уравненiя (3) въ зависимости отъ k. Показать, что среди многихъ другихъ интересныхъ выводовъ мы имѣемъ четыре соотношенiя, названныя Максвеллемъ термодинамическими,

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = -\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)_t; \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_p = \left(\frac{dt}{dp}\right)_\varphi; \left(\frac{dp}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{d\varphi}{dv}\right)_t; \left(\frac{dp}{d\varphi}\right)_v = -\left(\frac{dt}{dv}\right)_\varphi.$$

Упражненiе 2. Доказать что на чертежѣ 55 площадь $ABCD = AE.AF, = AU.AJ = AG.AM = AQ.AR$, и показать, что это соотвѣтствуетъ четыремъ вышеуказаннымъ соотношенiямъ.

Упражненiе 3. Пользуясь (23) вмѣстѣ съ (7), (8), (11) и (14), показать, что для всякаго вещества

$$L = -t\left(\frac{dv}{dt}\right),\ k = K - t\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{dp}{dt}\right),\ V = K\left(\frac{dt}{dv}\right),\ P = k\left(\frac{dt}{dp}\right),$$

и что (20) принимаетъ видъ

$$\left(\frac{dk}{dv}\right)_t = t\frac{d^2p}{dt^2},$$

такъ что
$$k = k_0 + t\int\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)dv,$$

гдѣ k_0 есть функцiя только температуры.

Дѣля $dH = K.dt + L.dp$ на t и выяснивъ, что это есть полный дифференцiалъ, показать, что можно вывести уравненiе

$$K = K_0 - t\int\frac{d^2v}{dt^2}.dp,$$

гдѣ K_0 есть функцiя только температуры.

Стран. 177. Другой способъ заключается просто въ разсмотрѣнiи уравненiя (8), которое равносильно уравненiю.

$$\delta H = k\,\delta t + l.\delta v,$$

гдѣ $l = t\left(\frac{dp}{dt}\right)$; когда одинъ фунтъ вещества объема s_1 получаетъ $\delta H = L$ при постоянной температурѣ ($\delta t = 0$), причемъ объемъ возрастаетъ до s_2, (такъ что $\delta v = s_2 - s_1$), то, такъ какъ $\frac{dp}{dt}$ не зависитъ отъ v, мы имѣемъ

$$\delta H = L = 0 + t.\frac{dp}{dt}.(s_2 - s_1).$$

Стран. 218. Синусоидальныя функціи времени, надъ которыми произведены дѣйствія вродѣ такихъ: $a+b\theta+c\theta^2+$ и т. д., $+e\theta^{-1}+f\theta^{-2}+$ и т. д., гдѣ θ означаетъ $\frac{d}{dt}$, могутъ быть представлены и трактуемы, какъ векторы, по способу здѣсь описанному. Представляя такимъ способомъ электродвижущую силу и силу тока, мы въ произведеніи будемъ получать энергію. Д-ръ Сумпнеръ показалъ (*Proc. Roy. Soc.*, Май 1897), что во многихъ важныхъ практическихъ задачахъ самые сложные виды періодическихъ функцій могутъ быть практикуемы по методу вектора.

Стран. 220. Символъ arctg означаетъ «уголъ, котораго тангенсъ равенъ».

Стран. 226. Чтобы понять, какимъ образомъ данную функцію можно разложить въ рядъ Фурье, необходимо обратить вниманіе на нѣкоторые весьма важные выводы п. 109; эти выводы являются для инженеровъ электриковъ всемогущими.

Стран. 226. П. 126 слѣдовало бы поставить на другое мѣсто, именно, непосредственно передъ п. 141.

Стран. 234. Здѣсь продолжена задача п. 125.

Стран. 241. Начинающій долженъ имѣть въ виду, что Σ означаетъ «сумму всѣхъ такихъ членовъ, которые можно получить, подставляя 1 вмѣсто s, 2 вмѣсто s, 3 и т. д.».

Стран. 241. См. упражн. 23 стр. 214.

Стран. 246. Студентъ долженъ замѣнить v черезъ C или Q въ (9), въ видѣ упражненія.

Стран. 246. См. п. 152.

Стран. 277. Вспомнимъ, что *дѣйствующая* величина $a \sin (nt+e)$ равна $a:\sqrt{2}$.

Стран. 290. Здѣсь опять студенту слѣдуетъ взять численный примѣръ.

Стран. 297. Тогда

$$e_1+e_2=E[\sin(nt+\alpha)+\sin(nt-\alpha)]=2E\cos\alpha\sin nt.$$

(См. п. 109).

Стран. 306. Всѣ другія поясненія, касающіяся этого предмета, которыя мнѣ приходилось встрѣчать, отличаются дѣтской простотой, но совершенно ложны.

Стран. 318. Тѣмъ же способомъ доказать, что

$$y=a^x;\ \frac{dy}{dx}=a^x \lg a.$$

Стран. 322. См. восьмой основной случай п. 215.

Стран. 341. См. (1) примѣчанія къ п. 21.

Стран. 343. П. 225 слѣдовало бы поставить впереди п. 222.

Стран. 347. См. упражн. 8, п. 99.

Стран. 352. Или (3).

Стран. 353. П. 225 слѣдовало бы поставить впереди п. 222.

Стран. 376. Я принялъ приблизительный законъ для h и, благодаря этому, работа значительно сократилась.

Стран. 406. **Вязкость.** Положимъ, что нѣкоторый плоскій слой жидкости двигается со скоростью v; слѣдующій параллельный ему слой жидкости, находящійся отъ него на разстояніи δx, движется со скоростью $v+\delta v$ въ томъ же направленіи, тогда тангенціальное усиліе на единицу поперечнаго сѣченія, которое необходимо приложить, чтобы воспрепятствовать движенію этого слоя, будетъ $\mu\frac{\delta v}{\delta x}$ или $\mu\frac{dv}{dx}$, гдѣ μ—вязкость жидкости.

Примѣръ 1. По трубкѣ круглаго сѣченія движется жидкость, при чемъ скорость ея параллельная оси трубки, равна v въ точкахъ, отстоящихъ отъ оси на разстояніи r. Выяснить условія равновѣсія цилиндрическаго слоя, заключающагося между радіусами r и $r+\delta r$, на единицу длины, считая по оси. Тангенціальное усиліе на внутренней поверхности слоя будетъ $2\pi r\mu\frac{dv}{dr}$, а на внѣшней поверхности, соотвѣтственно радіусу $r+\delta r$, будетъ $2\pi\mu\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\delta r$; разность давленій между двумя концами слоя, считая x по оси, даетъ силу—$-2\pi r\frac{dp}{dx}\delta r$. Масса слоя будетъ $2\pi r.\delta r.m$, если δr очень мало, и если m есть масса единицы объема; ускореніе ея будетъ $\frac{dv}{dt}$, гдѣ t означаетъ время; отсюда, приравнивая силу массѣ, умноженной на ускореніе и дѣля на $2\pi\mu\delta r$, мы получимъ

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)+\frac{r}{\mu}\frac{dp}{dx}=\frac{r.m}{\mu}\frac{dv}{dt}.$$

Примѣръ 2. Пусть $\frac{dp}{dx}$ — постоянно; положимъ, что на длинѣ l давленіе мѣняется на величину P, такъ что $\frac{dp}{dx}=\frac{P}{l}$. Положимъ, что движеніе установившееся, такъ что $\frac{dv}{dt}=0$, тогда

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)+\frac{r}{\mu}\frac{P}{l}=0.$$

Если $r\frac{dv}{dr}$ назовемъ u, а $\frac{P}{l\mu}$ назовемъ $2a$, тогда $\frac{du}{dr}+2ar=0$, такъ что $du+2ar.dr=0$, а отсюда $u+ar^2=$ постоянному c.

$$r\frac{dv}{dr}+ar^2=c,\ \text{или}\ \frac{dv}{dr}+ar=\frac{c}{r}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

отсюда $$dv + \left(ar - \frac{c}{r}\right) dr = 0,$$

или $$v + {}^1/_2\, ar^2 + {}^1/_2\, \frac{c}{r^2} = C \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Очевидно, что, такъ какъ при $r = 0$ тангенціальная сила равна 0, т. е. $\frac{dv}{dr} = 0$, то c должно быть равно 0. Отсюда

$$v + {}^1/_2 ar^2 = C \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Но $v = 0$ при $r = r_0$, — внѣшнему радіусу цилиндра жидкости, отсюда (2) принимаетъ видъ $v = {}^1/_2 a\,(r_0^2 - r^2)$.

Объемъ жидкости, протекающей въ секунду черезъ какое либо сѣченіе, будетъ

$$2\pi \int_0^{r^0} rv.dr = \frac{\pi}{4}\, ar_0^4 = \frac{\pi r_0^4 P}{8l\mu}.$$

Это даетъ намъ возможность вычислить коэффиціентъ вязкости жидкости, проходящей черезъ цилиндрическую трубку, если извѣстна скорость протеканія и дана разность давленія.